Un problema de equilibrio dinámico

F. Javier Gil Chica
Manuel Pérez Polo

marzo, 2009

Resumen

La estabilidad lateral de un vehículo ha sido estudiada en extenso, y desde hace mucho implementada en muchos vehículos. Menor atención ha merecido el análisis de la tracción longitudinal , aunque algunos fabricantes disponen ya de sistemas de ayuda para circular en diversos tipos de terrenos deslizantes (arena, nieve) y mantener la estabilidad del vehículo en descensos pronunciados. En este artículo presentamos un modelo de tracción de un vehículo sobre una curva cualquiera, sometido a deslizamiento y rozamiento, y encontramos condiciones generales para la detención del vehículo.

1. Ligadura de contacto

Las ecuaciones de Lagrange para un sistema de partículas cuya configuración se expresa en función del mínimo número de coordenadas generalizadas son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \tag{1}$$

donde L es la función de Lagrange y Q_j las fuerzas generalizadas que no derivan de una función potencial. $\mathcal{F}$ es la función de disipación de Rayleigh. En primer lugar, estamos interesados en la ligadura que mantiene a la partícula (vehículo) de masa m sobre una curva arbitraria $y = f(x)$. Cuando se tiene en cuenta esta ligadura, basta una sola coordenada generalizada, que puede ser y. Si suponemos que $x, y(x)$ son coordenadas independientes, las ecuaciones de Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} = Q_j \tag{2}$$

donde $\varphi(x,y) = y - f(x) = 0$ es la ligadura a la que está sometida la partícula y λ se identifica con la fuerza que hace efectiva tal ligadura. Con estas premisas, las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \lambda f' + k\dot{x} &= u_x \\ m\ddot{y} + mg + \lambda + k\dot{y} &= u_y \end{aligned} \tag{3}$$

donde u_x y u_y son las fuerzas generalizadas según los ejes coordenados. Si u es el módulo de la fuerza, siendo su dirección en todo momento tangente a la curva, es claro que

$$\begin{aligned} u_x &= hu \\ u_y &= hf'u \end{aligned} \tag{4}$$

Interesa expresar la ligadura en función de la velocidad y aceleración de la partícula medidas sobre la curva $y(x)$. De

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \dot{y} &= f'(x)\dot{x} \\ \ddot{y} &= f''(x)\dot{x}^2 + f'(x)\ddot{x} \end{aligned} \tag{5}$$

junto con

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \tag{6}$$

se sigue

$$\dot{x} = h\dot{s} \tag{7}$$

En lo sucesivo, omitiremos la dependencia de f y sus derivadas respecto a x. Hemos introducido $h^{-2} = 1 + f'^2$ Derivando (6):

$$\dot{s}\ddot{s} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} \tag{8}$$

sustituyendo $\dot{x}$ y $\dot{y}$, tras algunas manipulaciones

$$\ddot{x} = h(\ddot{s} - h^3 f' f'' \dot{s}^2) \tag{9}$$

De la segunda de las ecuaciones del movimiento, sustituyendo y reordenando:

$$\lambda = \dot{s}^2 \left[mh^2 f''(h^2 f'^2 - 1) \right] - \dot{s}khf' + (u_y - mg) \tag{10}$$

Puesto que λ se identifica con la fuerza de ligadura que mantiene a la partícula sobre la curva, la pérdida de contacto se producirá cuando sea $\lambda = 0$. Obtenemos de ahí un primer criterio de optimalidad para la tracción: que sea siempre $\lambda \neq 0$. Escribiendo la condición de "despegue" en una situación en que la aceleración lineal es nula, $\ddot{s} = 0$, como

$$\dot{s}^2 mh^2 f'' \left(\frac{-f'^2}{1 + f'^2} \right) - khf'\dot{s} + (u_y - mg) = 0 \tag{11}$$

podemos hacer un análisis cualitativo en función de las derivadas f' y f''. Este análisis es más sencillo si se toma $k \to 0$. Distinguimos cuatro casos, suponiendo siempre que es $u_y - mg < 0$:

- Cuando $f' > 0$ y $f'' > 0$, $\dot{s}^2 < 0$. Esto implica que la condición $\lambda = 0$ no tiene solución real para ningún valor de la velocidad y que por tanto la partícula permanece siempre en contacto con la curva. Es el caso en que el vehículo asciende por una pendiente que se incrementa progresivamente.
- Cuando $f' < 0$ y $f'' > 0$, $\dot{s}^2 > 0$. Existe por tanto solución real, luego existe una velocidad a la que el vehículo pierde contacto con la curva. Es el caso en que se asciende una pendiente que se suaviza progresivamente.
- Cuando $f' < 0$ f $f'' > 0$, $\dot{s}^2 < 0$ y de nuevo es imposible la pérdida de contacto. Es el caso de un vehículo que desciende una pendiente que se suaviza progresivamente.
- Cuando $f' < 0$ y $f'' < 0$, $\dot{s}^2 > 0$. Existe una velocidad para la que se produce pérdida de contacto. Corresponde al caso de un vehículo que desciende una pendiente que se hace más y más abrupta

2. Dinámica con deslizamiento

Procedemos ahora a plantear y resolver formalmente el problema dinámico. Para ello, introduciremos en nuestro modelo el efecto del deslizamiento sobre la superficie. Nuestra hipótesis es que el deslizamiento depende de la pendiente de la curva y de un factor característico de la superficie. Ambas hipótesis se integran en una sola expresión suponiendo que la fuerza efectiva de tracción w está en relación con la fuerza de auto-propulsión a través de la expresión:

$$w = u(1 - \alpha f'^2) \tag{12}$$

Con esto, las ecuaciones del movimiento, junto con la ligadura, se escriben:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - \lambda f' + k\dot{x} &= w_x = hw_x = hu(1 - \alpha f'^2) \\ m\ddot{y} + mg + \lambda + k\dot{y} &= w_y = hf'w_y = hf'u(1 - \alpha f'^2) \\ y &= f(x) \end{aligned} \tag{13}$$

Despejando λ de la segunda, usando la tercera para encontrar las derivadas de y, sustituyendo $\lambda(\dot{x}, \ddot{x})$ en la primera y reordenando:

$$\ddot{x} + p(x)\dot{x}^2 + \frac{k}{m}\dot{x} = q(x)u - h^2 g \tag{14}$$

donde hemos hecho

$$\begin{aligned} p(x) &= h^2 f' f'' \\ q(x) &= h^3(1 - \alpha f'^2)(1 + f') \end{aligned} \tag{15}$$

Una solución formal se encuentra cuando el vehículo asciende por una pendiente constante, $f' = f'_0$, en cuyo caso $f'' = 0$ y

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} = q_0 u - h_0^2 g \tag{16}$$

Introduciendo variables de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \tag{17}$$

tenemos

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ q_0 u - h_0^2 g \end{bmatrix} \tag{18}$$

La solución es conocida:

$$\bar{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\bar{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\bar{\nu}(\tau)d\tau \tag{19}$$

con

$$\bar{\nu}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ q_0 u(t) - h_0^2 g \end{bmatrix} \tag{20}$$

y donde la matriz exponencial es

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{m}{k}(\mathrm{senh}(\frac{k}{m}t) - \cosh(\frac{k}{m}t) + 1) \\ \\ 0 & \cosh(\frac{k}{m}t) - \mathrm{senh}(\frac{k}{m}t) \end{bmatrix} \tag{21}$$

3. Ecuación del movimiento

La introducción de las dos coordenadas (x, y) nos ha permitido anteriormente obtener una expresión para la ligadura de contacto. Puesto que una de ellas es supérflua, sustituyendo en la lagrangiana $y = f(x)$ e $\dot{y} = f'\dot{x}$ encontramos la ecuación del movimiento

$$\ddot{x} + h^2 f' f'' \dot{x}^2 + \frac{k}{m}\dot{x} = hu'(1 - \alpha f'^2) - g f' h^2 \tag{22}$$

con $u' = u/m$. En función del elemento de línea, siendo

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \tag{23}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 &= h^2 \dot{s}^2 \\ \ddot{x} &= h\ddot{s} - h^{5/2} f' f'' \dot{s}^{1/2} \end{aligned} \tag{24}$$

de donde

$$\ddot{s} - f' f'' h^{3/2} \dot{s}^{1/2} + h^3 f' f'' \dot{s}^2 + \frac{k}{m}\dot{s} = u'(1 - \alpha f'^2) - g f' h \tag{25}$$

Investiguemos a partir de aquí en qué condiciones puede el vehículo avanzar con velocidad lineal constante, $\ddot{s} = 0$. Poniendo $\dot{\sigma} = \dot{s}^{1/2}$:

$$-f' f'' h^{3/2} \dot{\sigma} + \frac{k}{m}\dot{\sigma}^2 + h^3 f' f'' \dot{\sigma}^4 = hu'(1 - \alpha f'^2) - g f' h \tag{26}$$

Cuando el desplazamiento se realiza a lo largo de una pendiente constante, es decir, con $f'' = 0$:

$$\frac{k}{m}\dot{\sigma}^2 = hu'(1 - \alpha f'^2) - g h f' \tag{27}$$

que relaciona la pendiente, la velocidad lineal y la fuerza por unidad de masa que desarrolla el vehículo. Volviendo a la ecuación cuártica:

$$\dot{\sigma}^4 + \frac{k}{m}\frac{1}{h^3 f' f''}\dot{\sigma}^2 - h^{-3/2}\dot{\sigma} - \frac{1-\alpha f'^2}{h^2 f' f''}u' + \frac{g}{h^2 f''} = 0 \tag{28}$$

Llamando

$$\begin{aligned} P &= \frac{k}{m}\frac{1}{h^3 f' f''} \\ Q &= -h^{-3/2} \\ R &= -u'\frac{1-\alpha f'^2}{h^2 f' f''} + \frac{g}{h^2 f''} \end{aligned} \tag{29}$$

de acuerdo con la teoría de ecuaciones cuárticas, escribimos el resolvente cúbico como

$$t^3 + 2Pt^2 + (P^2 - 4R)t - Q^2 = 0 \tag{30}$$

o

$$Z^3 + aZ + b = 0 \tag{31}$$

siendo

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3}[3(P^2 - 4R) - 4P^2] \\ b &= \frac{1}{27}[16P^3 - 18P(P^2 - 4R) - 27Q^2] \end{aligned} \tag{32}$$

con $Z = t - s$ y $s = -\frac{2}{3}P$, y calculamos la cantidad

$$\Delta = \frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4} \tag{33}$$

Según sea $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ o $\Delta < 0$ se obtienen distintas raíces Z_i. En el primer caso, la raíz real del resolvente es

$$\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \tag{34}$$

En el segundo, existen las raíces

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2\left(-\frac{b}{2}\right)^{1/3} \\ Z_2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^{1/3} \\ Z_3 &= \left(\frac{b}{2}\right)^{1/3} \end{aligned} \tag{35}$$

En el tercero:

$$\begin{aligned} Z_1 &= E\cos(\phi/3) \\ Z_2 &= E\cos(\phi/3+\pi/3) \\ Z_3 &= E\cos(\phi/3+2\pi/3) \end{aligned} \tag{36}$$

con

$$E = 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \tag{37}$$

y

$$\cos\phi = \frac{-b}{2\sqrt{-\frac{a^3}{27}}} \tag{38}$$

Llamando R' a la raíz real máxima (siempre existe al menos una raíz real) de entre $Z_i + s$, la ecuación cuártica queda finalmente reducida a

$$(\dot{\sigma}^2 + \sqrt{R'}\dot{\sigma} + \xi)(\dot{\sigma}^2 - \sqrt{R'}\dot{\sigma} + \beta) \tag{39}$$

con

$$\xi = \frac{1}{2}\left(P + R' - \frac{Q}{\sqrt{R'}}\right) \tag{40}$$

y

$$\beta = \frac{1}{2}\left(P + R' + \frac{Q}{\sqrt{R'}}\right) \tag{41}$$

que una de las raíces de los factores cuadráticos sea nula, implica que sean o bien $\xi = 0$ o bien $\beta = 0$. Para cada punto de la trayectoria, siendo (P, Q, R) funciones de la pendiente y de su derivada, de u' y de g, las ecuaciones $\xi = 0$ y $\beta = 0$ determinan puntos de equilibrio dinámico sobre la curva.