

DE FUNDAMENTIS SOLIS
HOROLOGIORUM
SIVE
FUNDAMENTOS DE GNOMÓNICA

F. J. Gil Chica
gil@disc.ua.es

Dpto. de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Escuela Politécnica Superior
Universidad de Alicante
ESPAÑA

ISBN 978-84-690-3595-5

<http://www.disc.ua.es/~gil/libros.html>

versión febrero 2007

Para mi amigo Juan Aroca Cervera

Índice general

1. Fundamentos geométricos	6
1.1. Matriz de rotación	6
1.2. Casos particulares de la matriz de rotación	7
1.3. Ángulos de Euler	9
2. Fundamentos dinámicos	11
2.1. Introducción	11
2.2. Propiedades básicas del movimiento	12
2.2.1. Conservación de la energía mecánica	12
2.2.2. Conservación del momento angular	13
2.2.3. Ecuación de la trayectoria	13
2.3. Elementos clásicos de la órbita	15
2.4. Elementos clásicos a partir de posición y velocidad	16
2.5. Posición y velocidad a partir de los elementos	17
2.6. Función de Lagrange	18
2.7. Solución de las ecuaciones del movimiento	20
3. Sistemas de referencia astronómicos	23
3.1. Coordenadas polares	23
3.2. Relación entre los distintos sistemas	29
3.3. Proyección de un punto sobre un plano	31
4. Tiempo	33
4.1. Tiempo sidéreo y tiempo solar	33
4.2. Soles ficticios	35
4.3. Ecuación de tiempo	35
4.4. Reducción al ecuador	36
4.5. Ecuación del centro	37
4.6. Tiempo civil	40
4.7. El periodo Juliano	41
4.8. Tiempo sidéreo a 0h de tiempo universal	43

5. Geometría del cuadrante solar	46
5.1. Orto y ocaso	46
5.2. El analema	51
5.3. El reloj solar horizontal	52
5.4. Curvas de altura	55
6. Relojes verticales y declinantes	60
6.1. El reloj vertical	60
6.2. El reloj declinante, I	62
6.3. El reloj declinante, II	62
6.4. Determinación experimental de la orientación de la pared . . .	63
6.4.1. Un método teórico	63
6.4.2. Un método práctico	65

Hacía tiempo que deseaba escribir este librito, que comienzo en una lluviosa tarde del mes de mayo. Hace ya diez años que di a la imprenta *Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos*. Desde entonces, mi actividad profesional me ha llevado por caminos diversos, pero aquellos que compartan mi amor por las cosas del cielo no necesitarán explicaciones para comprender cómo este deseo ha podido estar presente a lo largo de todos estos años.

Confieso que también estuvo presente cierta incomodidad por lo imperfecta que resultó la *Teoría de eclipses* El libro contiene un cierto número de erratas, omite un par de figuras y el resto de las mismas denota una falta de pericia que con el paso del tiempo se hace más evidente. Desgraciadamente, los libros técnicos suelen tener tiradas cortas y escasas reediciones. En resumen: soy rehén de aquellos errores para siempre. Aún cuando, en general, es un libro valioso, con gran cantidad de información muy difícil de encontrar por otras fuentes, no descarto en un futuro reescribirlo desde los cimientos y contruir el tratado de eclipses que pudo ser.

Así que fruto de un deseo antiguo por escribir un librito sobre relojes de sol y la incomodidad de una obra anterior que se siente imperfecta comienzo la redacción de este *de fundamentis solis horologiorum*.

Los relojes de sol existen en multitud de formas, y superada su utilidad práctica queda una hermosa conjunción entre matemáticas y arte ornamental. También una comunión silenciosa con los astros. Espero que este librito ayude al lector a apreciar su arte, aunque nuestra intención no va más allá de la presentación de los principios matemáticos. No hablaremos de historia ni de diseño, aunque se muestran un par de cuadrantes para relojes horizontales.

Puesto que este pequeño trabajo se centra en los fundamentos, se ha dedicado el espacio necesario a los fundamentos dinámicos, y así se trata con cierto detenimiento el problema de Kepler.

Quiero insistir es que ésta es la exposición de los fundamentos. El análisis geométrico de las infinitas variaciones sobre el mismo tema, el de la proyección de la sombra solar, sería seguramente ocioso.

En general, el autor de un libro lo escribe, en primer lugar, para enseñarse a sí mismo. Siendo por tanto el punto de vista de un recién llegado a la gnomónica, lo ofrezco con humildad, a la espera de que otros más expertos puedan señalar de donde cojea.

Alicante, septiembre de 2006

Capítulo 1

Fundamentos geométricos

1.1. Matriz de rotación

En esta parte se tratan aspectos púramente geométricos. En concreto, la relación entre las coordenadas de un punto en un sistema de referencia y en otro girado respecto al primero.

Sea el sistema original, fijo, determinado por los versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, y el sistema girado respecto al primero, con versores $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$, y el mismo origen. Sea \bar{r}_o un vector en el sistema fijo, y \bar{r}_p el mismo vector, pero en el sistema $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\bar{r}_o &= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ \bar{r}_p &= x'\hat{u} + y'\hat{v} + z'\hat{w}\end{aligned}\tag{1.1}$$

En el sistema o , los versores $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ se expresan como:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= (\hat{u}.\hat{i})\hat{i} + (\hat{u}.\hat{j})\hat{j} + (\hat{u}.\hat{k})\hat{k} \\ \hat{v} &= (\hat{v}.\hat{i})\hat{i} + (\hat{v}.\hat{j})\hat{j} + (\hat{v}.\hat{k})\hat{k} \\ \hat{w} &= (\hat{w}.\hat{i})\hat{i} + (\hat{w}.\hat{j})\hat{j} + (\hat{w}.\hat{k})\hat{k}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned}\bar{r}_p &= x'((\hat{u}.\hat{i})\hat{i} + (\hat{u}.\hat{j})\hat{j} + (\hat{u}.\hat{k})\hat{k}) + \\ & y'((\hat{v}.\hat{i})\hat{i} + (\hat{v}.\hat{j})\hat{j} + (\hat{v}.\hat{k})\hat{k}) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z'((\hat{w}.\hat{i})\hat{i} + (\hat{w}.\hat{j})\hat{j} + (\hat{w}.\hat{k})\hat{k}) \\
= & (x'(\hat{u}.\hat{i}) + y'(\hat{v}.\hat{i}) + z'(\hat{w}.\hat{i}))\hat{i} + \\
& (x'(\hat{u}.\hat{j}) + y'(\hat{v}.\hat{j}) + z'(\hat{w}.\hat{j}))\hat{j} + \\
& (x'(\hat{u}.\hat{k}) + y'(\hat{v}.\hat{k}) + z'(\hat{w}.\hat{k}))\hat{k}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Y de aquí:

$$\begin{aligned}
x &= x'(\hat{u}.\hat{i}) + y'(\hat{v}.\hat{i}) + z'(\hat{w}.\hat{i}) \\
y &= x'(\hat{u}.\hat{j}) + y'(\hat{v}.\hat{j}) + z'(\hat{w}.\hat{j}) \\
z &= x'(\hat{u}.\hat{k}) + y'(\hat{v}.\hat{k}) + z'(\hat{w}.\hat{k})
\end{aligned} \tag{1.4}$$

En forma matricial, podemos escribir la relación entre las coordenadas en el sistema o y el sistema p como:

$$\bar{r}_o = \mathbf{R}\bar{r}_p \tag{1.5}$$

con

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{u}.\hat{i} & \hat{v}.\hat{i} & \hat{w}.\hat{i} \\ \hat{u}.\hat{j} & \hat{v}.\hat{j} & \hat{w}.\hat{j} \\ \hat{u}.\hat{k} & \hat{v}.\hat{k} & \hat{w}.\hat{k} \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

A la matriz \mathbf{R} se le llama *matriz de rotación*.

1.2. Casos particulares de la matriz de rotación

Es fácil encontrar \mathbf{R} para el caso particular en que el sistema p se obtiene rotando el sistema o alrededor de uno de sus ejes. Consideremos en primer lugar el paso del sistema o al p mediante el giro del primero en torno al eje \hat{i} un ángulo ϕ :

$$\begin{aligned}
\hat{u}.\hat{i} &= 1 \\
\hat{u}.\hat{j} &= 0 \\
\hat{u}.\hat{k} &= 0 \\
\hat{v}.\hat{i} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{v}.\hat{j} &= \cos \phi \\
\hat{v}.\hat{k} &= \sin \phi \\
\hat{w}.\hat{i} &= 0 \\
\hat{w}.\hat{j} &= -\sin \phi \\
\hat{w}.\hat{k} &= \cos \phi
\end{aligned} \tag{1.7}$$

de donde obtenemos la matriz de rotación:

$$\mathbf{R}_{\hat{i},\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Si giramos el sistema o en torno al eje \hat{j} un ángulo ϕ , por idéntico razonamiento:

$$\begin{aligned}
\hat{u}.\hat{i} &= \cos \phi \\
\hat{u}.\hat{j} &= 0 \\
\hat{u}.\hat{k} &= -\sin \phi \\
\hat{v}.\hat{i} &= 0 \\
\hat{v}.\hat{j} &= 1 \\
\hat{v}.\hat{k} &= 0 \\
\hat{w}.\hat{i} &= \sin \phi \\
\hat{w}.\hat{j} &= 0 \\
\hat{w}.\hat{k} &= \cos \phi
\end{aligned} \tag{1.9}$$

y

$$\mathbf{R}_{\hat{j},\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

Finalmente, al considerar el giro de o en torno al eje \hat{k} :

$$\begin{aligned}
\hat{u}.\hat{i} &= \cos \phi \\
\hat{u}.\hat{j} &= \sin \phi \\
\hat{u}.\hat{k} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{v}.\hat{i} &= -\sin \phi \\
\hat{v}.\hat{j} &= \cos \phi \\
\hat{v}.\hat{k} &= 0 \\
\hat{w}.\hat{i} &= 0 \\
\hat{w}.\hat{j} &= 0 \\
\hat{w}.\hat{k} &= 1
\end{aligned} \tag{1.11}$$

y

$$\mathbf{R}_{\hat{k},\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

1.3. Ángulos de Euler

En general, es posible pasar de un sistema o a un sistema p , que comparta el mismo origen y tiene una orientación arbitraria respecto al primero, mediante tres rotaciones sucesivas. Los ángulos que definen estas rotaciones se denominan *ángulos de Euler* y desgraciadamente no existe acuerdo en su definición. Nosotros usaremos el convenio siguiente: para llevar el sistema o a coincidir con el sistema p , se realizan los tres giros siguientes:

- Un giro $\mathbf{R}_{\hat{k},\phi}$
- Un giro $\mathbf{R}_{\hat{i},\theta}$
- Un giro $\mathbf{R}_{\hat{k},\psi}$

Consideremos ahora los sistemas de referencia intermedios s y t . Al primero se llega después de la primera rotación, a partir de o , y al segundo, tras la segunda rotación sobre s . La tercera rotación es la que conduce de t a p . Está claro que:

$$\begin{aligned}
\bar{r}_o &= \mathbf{R}_{\hat{k},\phi} \bar{r}_s \\
\bar{r}_s &= \mathbf{R}_{\hat{i},\theta} \bar{r}_t \\
\bar{r}_t &= \mathbf{R}_{\hat{k},\psi} \bar{r}_p
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Se sigue de aquí que

$$\bar{r}_o = \mathbf{R}_{\hat{k},\phi} \mathbf{R}_{\hat{i},\theta} \mathbf{R}_{\hat{k},\psi} \bar{r}_p = \mathbf{R} \bar{r}_p \quad (1.14)$$

Y vemos cómo obtenemos la rotación completa como el producto de tres rotaciones individuales. Esta es la expresión de la matriz \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \cos \theta \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \sin \phi \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \cos \theta \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Capítulo 2

Fundamentos dinámicos

2.1. Introducción

Si el plano del ecuador terrestre coincidiese con el plano de la órbita terrestre y si ésta fuese circular, carecería de sentido construir una teoría sobre los relojes solares, ya que sería trivial. Pero la Tierra describe una órbita elíptica que recorre en cada punto con una velocidad distinta. Aún cuando el eje de rotación terrestre fuese perpendicular al plano de su órbita, el movimiento irregular en la misma sería motivo suficiente para tener que hacer una discusión cuidadosa.

En este capítulo discutiremos el movimiento elíptico kepleriano, estableciendo sus propiedades fundamentales.

Se suele denominar *Problema de Kepler* a la resolución del movimiento de dos cuerpos sometidos únicamente a su mutua atracción gravitatoria. Este puede ser un problema formidable, por lo que usualmente se añade una restricción: que los cuerpos sean puntos materiales, o en su defecto que tengan una distribución de masa esféricamente simétrica, pues en este caso es conocido que el potencial gravitatorio de un cuerpo así en puntos externos al mismo equivale al de una masa puntual igual a la del cuerpo.

El problema de Kepler ha sido y es hilo conductor en el desarrollo de la Mecánica desde hace tres siglos, y ha inspirado la mayor parte de los métodos que se han desarrollado en todo este periodo. Los grandes nombres de la Física y las Matemáticas desde el siglo XVI han dejado su impronta en este aparentemente simple problema, creando con el paso del tiempo un

corpus vastísimo que puede ser fuente de estudio, reflexión y placer estético para toda una vida, y aún para varias.

2.2. Propiedades básicas del movimiento

Conviene en este punto adoptar una posición ecléctica, reconociendo que la Mecánica Vectorial proporciona el método más directo para poner de manifiesto las propiedades básicas del movimiento. Esto será útil cuando planteemos el problema a través del formalismo de la Mecánica Analítica, y para interpretar algunos de los resultados que entonces encontraremos.

Consideremos dos cuerpos, bien puntos materiales, bien sólidos con simetría de masas esférica, de masas m_1 y m_2 , situados en las posiciones \bar{r}_1 y \bar{r}_2 en un sistema de referencia inercial. Es conocido que cada uno de ellos experimenta una atracción gravitatoria proporcional al producto $m_1 m_2$, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} &= \frac{G m_1 m_2}{r^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ m_2 \frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} &= \frac{-G m_1 m_2}{r^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Simplificando m_1 en la primera, m_2 en la segunda y restando

$$\frac{d^2 (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{dt^2} = \frac{-G (m_1 + m_2) (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)}{r^3} \quad (2.2)$$

Llamando $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, suele escribirse

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{\mu}{r^3} \bar{r} = 0 \quad (2.3)$$

que es la ecuación del movimiento en forma vectorial. No es preciso integrarla para obtener algunas propiedades fundamentales.

2.2.1. Conservación de la energía mecánica

Multiplicando escalarmente 2.3 por la velocidad:

$$\dot{\bar{r}} \ddot{\bar{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{\bar{r}}^2 = -\frac{\mu}{r^3} (\dot{\bar{r}} \bar{r}) \quad (2.4)$$

Pero en general se cumple que $\bar{a}\dot{a} = a\dot{a}$, luego

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{r}^2 = \frac{-\mu}{r^3} r \dot{r} = \frac{d}{dt} \frac{\mu}{r} \quad (2.5)$$

y de aquí

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Finalmente:

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{\mu}{r} = E \quad (2.7)$$

donde E es una constante que llamaremos *energía mecánica específica*

2.2.2. Conservación del momento angular

Tomando el producto vectorial del vector posición por la ecuación del movimiento:

$$\bar{r} \times \ddot{\bar{r}} = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = -\frac{\mu}{r^3} \bar{r} \times \bar{r} = 0 \quad (2.8)$$

de donde se sigue que

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = \bar{h} \quad (2.9)$$

donde \bar{h} es un vector constante llamado *momento angular específico*. Ahora bien, si \bar{h} es un vector constante, perpendicular al plano que definen la posición y la velocidad, este plano a su vez es constante. Por tanto, el movimiento queda restringido a un plano, llamado *plano de la órbita*.

2.2.3. Ecuación de la trayectoria

Multiplicando vectorialmente la ecuación del movimiento por la derecha por el vector momento angular:

$$\ddot{\bar{r}} \times \bar{h} = \frac{\mu}{r^3} (\bar{h} \times \bar{r}) \quad (2.10)$$

Como \bar{h} es constante:

$$\ddot{\vec{r}} \times \bar{h} = \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \bar{h}) = \frac{d}{dt} [\dot{\vec{r}} \times (\bar{r} \times \dot{\vec{r}})] \quad (2.11)$$

Mientras que el segundo miembro queda:

$$\frac{\mu}{r^3} (\bar{h} \times \bar{r}) = \frac{\mu}{r^3} [\bar{r} \times (\dot{\vec{r}} \times \bar{r})] = \frac{\mu}{r^3} [\dot{\vec{r}}(\bar{r}\bar{r}) - \bar{r}(\bar{r}\dot{\vec{r}})] = \frac{\mu}{r} \dot{\vec{r}} - \frac{\mu}{r^2} \dot{\vec{r}}\bar{r} \quad (2.12)$$

que a su vez es, simplemente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \bar{r} \right) \quad (2.13)$$

En definitiva, de 2.11 y 2.13, vemos que existe un vector \bar{B} constante tal que

$$\dot{\vec{r}} \times \bar{h} - \frac{\mu}{r} \bar{r} = \bar{B} \quad (2.14)$$

Si multiplicamos ahora escalarmente por \bar{r} :

$$\bar{r}(\dot{\vec{r}} \times \bar{h}) - \frac{\mu}{r} \bar{r}\bar{r} = \bar{B}\bar{r} \quad (2.15)$$

Pero, en general $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$, luego, llamando θ al ángulo formado entre \bar{B} y \bar{r} :

$$h^2 = \mu r + Br \cos \theta \quad (2.16)$$

o

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + (B/\mu) \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (2.17)$$

La interpretación geométrica de esta ecuación es sencilla, pues el último miembro es la ecuación de una cónica en coordenadas polares, cuando el origen coincide con uno de los focos. A p se le llama *parámetro*, y vemos que está relacionado con el momento angular específico. A e se le llama *excentricidad*, y su valor determina el tipo de cónica. Cuando $e = 0$ la órbita es una circunferencia. Para $0 < e < 1$ es una elipse. Cuando $e = 1$ se trata

de una parábola y para $e > 1$ es una hipérbola. También es evidente que el vector \vec{B} apunta en la dirección $\theta = 0$, es decir, en la dirección del periapsis. No es nuestra intención examinar las propiedades geométricas de cada tipo de curva. Únicamente, y para fijar ideas, consideremos las órbitas cerradas. Cuando son circulares

$$r = p = a \quad (2.18)$$

siendo a el radio de la órbita. Cuando la órbita es elíptica, su dimensión longitudinal es el doble del semieje mayor, de forma que

$$2a = r(0) + r(\pi) = \frac{2p}{1 - e^2} \quad (2.19)$$

de donde

$$p = a(1 - e^2) \quad (2.20)$$

2.3. Elementos clásicos de la órbita

Como se ha dicho, la órbita se encuentra contenida en un plano, de forma que la especificación adecuada de la misma tiene que incluir, en primer lugar, la orientación de ese plano. Para esto, se toma un sistema de referencia inercial, y normalmente el plano xy de este sistema se adopta como plano de referencia. Al ángulo entre las normales a ambos planos se le llama *inclinación* i . Existen infinidad de planos cuyas normales forman el mismo ángulo con la normal al plano de referencia. Para seleccionar uno dado se toma una dirección arbitraria en el plano de referencia, que normalmente será la del eje x , y se dá el ángulo que con esta dirección forma la intersección del plano de referencia y del plano de la órbita. A esta intersección se le llama *línea de los nodos*, y al ángulo *longitud del nodo ascendente* Ω .

Una vez fijado el plano de la órbita, es preciso especificar su orientación y tamaño dentro de ese plano. La orientación puede determinarse por el ángulo entre la línea de los nodos y el vector \vec{B} . A este ángulo se le llama *longitud del periapsis* ω . En cuanto al tamaño, queda determinado por el parámetro p . También es preciso dar la posición del cuerpo en la órbita. Para esto, basta el ángulo que forman \vec{r} y \vec{B} , que llamaremos ν y al que la literatura se refiere con el nombre de *anomalía verdadera*.

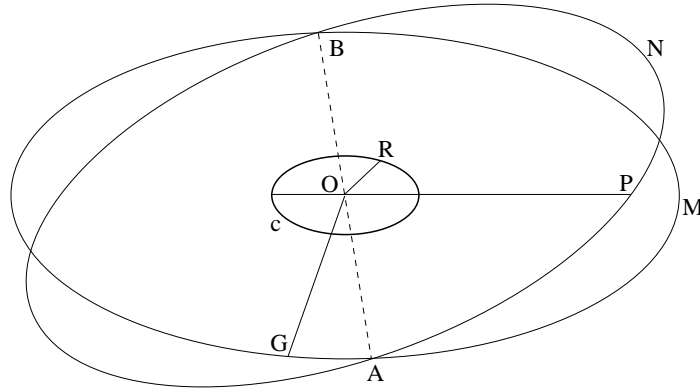


Figura 2.1

Se incluye entre los elementos clásicos de la órbita el instante T en que el cuerpo pasó por el periapsis, y que dado el instante actual t , a través de la diferencia $t - T$ y el ángulo ν recorrido permite encontrar la velocidad a la que el cuerpo se mueve.

Estos seis elementos $(i, \Omega, \omega, p, \nu, T)$ son los llamados *elementos clásicos de la órbita*, y son equivalentes a los seis valores que determinan, en un momento dado, los vectores posición y velocidad. No es extraño, puesto que la ecuación del movimiento es de segundo orden, y su solución depende de las condiciones iniciales $\vec{r}(0)$ y $\dot{\vec{r}}(0)$, es decir, de seis constantes.

En relación con la Figura (2.1), la línea AB es la línea de los nodos, intersección del plano de referencia M con el plano N que contiene a la órbita c . La longitud del nodo ascendente es el ángulo $G\hat{O}A$ y la inclinación de la órbita el ángulo $N\hat{O}M$. La longitud del periapsis es el ángulo $A\hat{O}P$. Si en un momento dado el astro se encuentra en la posición P , el ángulo $R\hat{O}P$ es la anomalía verdadera.

2.4. Elementos clásicos a partir de posición y velocidad

De hecho, y como continuación del punto anterior, dados \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$ en un momento dado, referidos al sistema inercial cuyo plano xy tomamos como plano de referencia, es fácil encontrar los elementos clásicos de la órbita. En efecto, si llamamos \hat{u} , \hat{v} y \hat{w} a los versores en las direcciones de los ejes en el sistema inercial, tenemos que

$$\bar{h} = \bar{r} \times \dot{\bar{r}} \quad (2.21)$$

y es perpendicular a la órbita. Su ángulo con el versor \hat{w} indica la inclinación. La dirección de la línea de los nodos es la misma que la del vector $\hat{w} \times \bar{h}$, y el ángulo de éste con \hat{u} determina Ω . Por otro lado 2.14 proporciona el vector \bar{B} , que sabemos apunta hacia el periapsis. ω es el ángulo que \bar{B} forma con la línea de los nodos, y ν el ángulo que \bar{r} forma con \bar{B} . Respecto a T , diferiremos para más adelante la obtención de la ley del movimiento, que permite, si t es el instante actual, encontrar la diferencia $t - T$.

Existen algunas situaciones especiales que deben considerarse. Así, si $i = 0$ la línea de los nodos no está definida, y si la órbita es circular tampoco está definida la dirección del periapsis.

2.5. Posición y velocidad a partir de los elementos

A la inversa, el conocimiento de los elementos clásicos de la órbita permite encontrar, en cada momento, la posición y velocidad del cuerpo. Para ello, conviene introducir las *coordenadas perifocales*, definidas por los ejes de versores \hat{p} , \hat{q} y \hat{r} . El primero coincide con la dirección del periapsis. \hat{r} tiene la misma dirección que \bar{h} , y el segundo es tal que $\hat{p} \times \hat{q} = \hat{r}$. En coordenadas perifocales

$$\bar{r}_p = r \cos \nu \hat{p} + r \sin \nu \hat{q} \quad (2.22)$$

donde r viene dado por 2.17. Para encontrar la velocidad, derivando la expresión anterior, y puesto que los versores son constantes:

$$\bar{v}_p = \frac{d\bar{r}_p}{dt} = (\dot{r} \cos \nu - r \dot{\nu} \sin \nu) \hat{p} + (\dot{r} \sin \nu + r \dot{\nu} \cos \nu) \hat{q} \quad (2.23)$$

Es fácil ver que

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \nu \quad (2.24)$$

En efecto, derivando 2.17 y teniendo en cuenta que $h^2 = p\mu$ y que $h = r^2\dot{\nu}$, 2.24 se sigue inmediatamente. Para obtener $h = r^2\dot{\nu}$ sólo hay que tomar posición y velocidad en coordenadas perifocales y efectuar el producto vectorial. Por otra parte:

$$r\dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e \cos \nu) \quad (2.25)$$

que se sigue directamente de 2.17 y 2.24. En definitiva:

$$\dot{\vec{r}}_p = \sqrt{\frac{\mu}{p}}[-\sin \nu \hat{p} + (e + \cos \nu) \hat{q}] \quad (2.26)$$

Pero el sistema de referencia perifocal se obtiene a partir del sistema de referencia inercial mediante una rotación compuesta de ángulos de Euler (Ω, i, ω) , cuya matriz es conocida. Por tanto, de \vec{r}_p y $\dot{\vec{r}}_p$ es posible encontrar posición y velocidad en el sistema inercial.

2.6. Función de Lagrange

Aprovechando nuestro conocimiento de que la órbita es plana, podemos elegir un sistema de referencia contenido en el plano de la órbita. En tal sistema, los dos cuerpos tienen cuatro grados de libertad. A saber: las coordenadas x e y de cada cuerpo m_1 y m_2 . Así, escribimos la energía cinética simplemente como

$$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (2.27)$$

Ahora bien: la energía potencial U depende de la distancia relativa entre las dos masas, por lo que conviene pasar a unas nuevas coordenadas generalizadas

$$\begin{aligned} x &= x_2 - x_1 \\ y &= y_2 - y_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pero x_1 y x_2 , como y_1 e y_2 , no son independientes. Se relacionan entre sí a través de las coordenadas del centro de masas:

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)x_{CM} &= m_1x_1 + m_2x_2 \\
(m_1 + m_2)y_{CM} &= m_1y_1 + m_2y_2
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

En definitiva, pueden escribirse x_1, x_2, y_1, y_2 en función de x, y, x_{CM}, y_{CM} y obtener, tras cálculos sencillos:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2) + \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{Gm_1m_2}{r} = L_{CM} + L'
\tag{2.30}$$

con $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. De esta forma, el movimiento del centro de masas queda desacoplado del movimiento relativo. Las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas del centro de masas son

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{CM} &= 0 \\
\ddot{y}_{CM} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.31}$$

Es decir: el centro de masas se encuentra en reposo o se mueve con velocidad constante. Las ecuaciones del movimiento para x e y pueden también obtenerse, pero se prefiere aquí usar coordenadas polares perifocales (r, θ)

$$\begin{aligned}
x &= r \cos \theta \\
y &= r \sin \theta
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

y escribir

$$L' = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{Gm_1m_2}{r}
\tag{2.33}$$

De las dos ecuaciones del movimiento estamos interesados en la que proporciona $\theta(t)$, puesto que ya tenemos la ecuación de la trayectoria $r(\theta)$. Esta ecuación es

$$r^2\dot{\theta} = h
\tag{2.34}$$

donde h es una constante, que ya sabemos que coincide con el momento angular específico.

2.7. Solución de las ecuaciones del movimiento

De 2.34 y de la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{p^2}(1 + e \cos \theta)^2 \quad (2.35)$$

cuyas variables pueden separarse y escribir

$$\frac{h}{p^2} dt = \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad (2.36)$$

ó

$$\frac{h}{p^2}(t - T) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad (2.37)$$

La integración de 2.37 proporciona θ para $t - T$ dado, y la ecuación de la trayectoria dá r . Llamando $I(e, \theta)$ a la integral

$$\frac{h}{p^2}(t - T) = I(e, \theta) \quad (2.38)$$

En particular, si \mathcal{P} es el periodo para órbitas cerradas

$$\mathcal{P} = \frac{p^2}{h} I(e, 2\pi) \quad (2.39)$$

Desgraciadamente, $I(e, \theta)$ sólo se calcula de forma fácil para $e = 0$ o $e = 1$, y por tanto sólo para órbitas circulares o parabólicas es posible encontrar expresiones cerradas para $\theta(t)$ y por tanto para $r(t)$. Los casos elíptico e hiperbólico requieren de cambios de variable especiales que permiten el cálculo de $I(e, \theta)$.

De una forma u otra, $r(t)$ y $\theta(t)$ dan las componentes del vector posición en el sistema perifocal, y mediante el correspondiente giro, el vector de posición en el sistema inercial. Por supuesto, dado θ es posible encontrar $t - T$, y por tanto el tiempo de paso por el periapsis, cuya discusión habíamos diferido hasta ahora.

Por su interés, consideremos el caso de órbitas elípticas, para las que $0 < e < 1$. De la ecuación de la trayectoria, vemos que r oscila entre el valor mínimo $r(0) = a(1 - e)$ y el valor máximo $r(\pi) = a(1 + e)$. Esto sugiere un cambio de variable de la forma

$$r = a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.40)$$

A E se le llama *anomalía excéntrica* y se encuentra siempre en el mismo semiplano que θ . De 2.40

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e - \cos E}{e \cos E - 1} \\ \text{sen } \theta &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \text{sen } E}{1 - e \cos E} \end{aligned} \quad (2.41)$$

y diferenciando la primera

$$d\theta = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} dE \quad (2.42)$$

Con este cambio de variable

$$t - T = \frac{a^{3/2}}{\mu^{1/2}} (E - e \text{sen } E) \quad (2.43)$$

que es conocida como *Ecuación de Kepler*. En particular, cuando $t - T = \mathcal{P}$ obtenemos para el periodo:

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{\mu^{1/2}} a^{3/2} \quad (2.44)$$

Esta es la expresión de la tercera ley de Kepler: los cuadrados de los periodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes. En realidad, este enunciado es sólo aproximado, porque la constante de proporcionalidad $\mu = G(m_1 + m_2)$. En el caso de los planetas, la masa de cualquiera de ellos es despreciable frente a la masa del Sol, y puede considerarse que μ es igual para todos. La ecuación de Kepler se escribe más frecuentemente como

$$M = n(t - T) = E - e \text{sen } E \quad (2.45)$$

A M se le llama *anomalía media*. La resolución de la ecuación de Kepler, para un M dado, proporciona E , y de ahí θ y r . Durante los últimos tres siglos, esta ecuación ha motivado una cantidad de trabajo asombrosa, sobre todo si se tiene en cuenta que el sencillo procedimiento iterativo:

$$\begin{aligned} E^{(0)} &= M \\ E^{(i)} &= M + e \operatorname{sen} E^{(i-1)} \end{aligned} \tag{2.46}$$

converge rápidamente y proporciona soluciones de precisión arbitraria.

Capítulo 3

Sistemas de referencia astronómicos

3.1. Coordenadas polares

Si observamos el cielo en una noche estrellada, los cuerpos celestes parecen distribuidos sobre una esfera de radio indefinido. La distancia a la que se encuentran los cuerpos celestes es, en principio, desconocida. En los casos en que puede calcularse por métodos geométricos, este cálculo se basará en aquellas cantidades mensurables directamente: las coordenadas polares respecto a algún sistema de referencia adecuado.

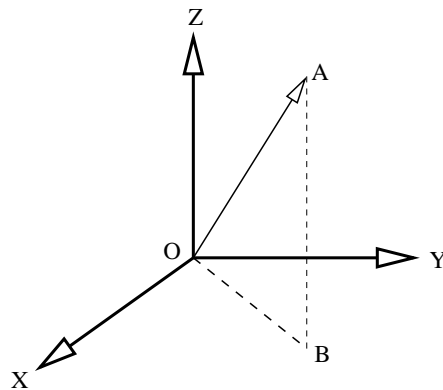


Figura 3.1

En relación con la Figura (3.1), adoptamos como plano principal aquel que contiene a los ejes x e y . La intersección de este plano con la esfera celeste determina un círculo. Los planos perpendiculares al plano principal

que contienen al origen de coordenadas intersectan también con la esfera celeste en círculos secundarios.

Para aquellos casos en que la distancia finita a la que se encuentran los astros tiene relevancia, es preciso indicar también cual es el origen del sistema de referencia. Así, hablamos de coordenadas heliocéntricas cuando el sistema de referencia tiene su origen en el Sol, geocéntricas cuando el origen se encuentra en el centro de masas de la Tierra y topocéntricas cuando el origen del sistema de referencia coincide con la posición del observador.

Pues bien, la dirección en que aparece un astro sobre la bóveda del cielo queda determinada por los ángulos $\varphi = X\hat{O}B$ y $\theta = A\hat{O}B$. Estos ángulos reciben nombres específicos y se designan con letras convenidas según cual sea el plano principal que se elija y la dirección del eje x en ese plano.

Dos planos importantes son el plano que contiene al ecuador terrestre y el plano de la órbita de la tierra, llamado *eclíptica*. Ambos planos no son paralelos, sino que forman entre sí un ángulo de unos 23° .

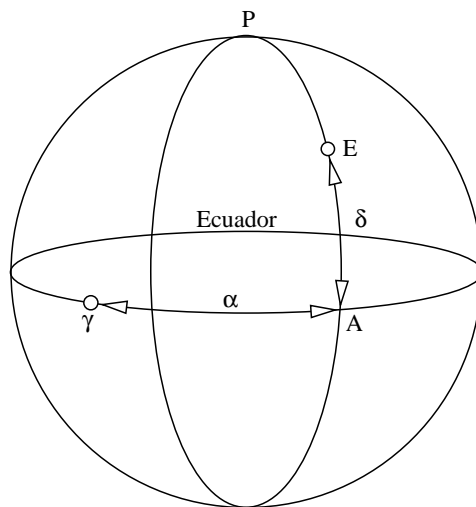


Figura 3.2

La Figura (3.2) representa el ecuador terrestre y un círculo secundario que contiene a un astro E . Las coordenadas de ese astro son la *ascensión recta* α que se mide a partir de un punto γ sobre el ecuador en sentido antihorario hasta el punto A que es la intersección entre el ecuador y el círculo secundario

que contiene al astro E y la *declinación* δ , que se mide desde el ecuador hasta el astro sobre el círculo secundario que lo contiene. Al conjunto (α, δ) se le llama *coordenadas ecuatoriales*. La ascensión recta se mide en horas, minutos y segundos, y la declinación en grados, minutos y segundos de arco ¹. La línea perpendicular al ecuador intersecta a la esfera celeste en el punto P , llamado *polo norte celeste*. ¿Cómo se elige el punto γ ? Se ha dicho que ecuador y eclíptica forman entre sí un ángulo, y por tanto se cortan en dos puntos. γ es uno de ellos. Concretamente aquel a partir del cual la ascensión recta del Sol pasa a encontrarse en el primer cuadrante. La Figura (3.3) muestra la relación entre ecuador y eclíptica y la elección del punto γ . La inclinación de la eclíptica $\epsilon = M\hat{\gamma}N$.

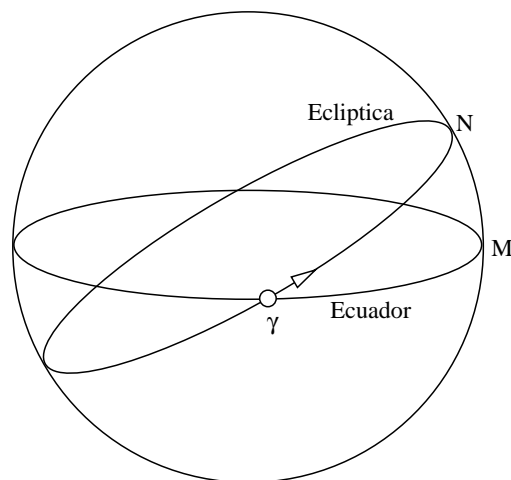


Figura 3.3

La Figura (3.4) muestra un sistema de referencia que toma como plano principal el de la eclíptica. Las coordenadas eclípticas son los ángulos (λ, β) . La primera se llama *longitud celeste* y la segunda *latitud celeste*. Ambas se miden en grados, minutos y segundos de arco.

Junto con los sistemas de referencia perifocal, ecuatorial y eclíptico tienen relevancia dos sistemas más: el horizontal y el horario. El sistema horizontal toma como plano fundamental el plano del horizonte del observador. En la Figura (3.5) puede apreciarse cómo, para un observador situado en un punto O , el polo norte (intersección con la esfera celeste del eje de rotación de

¹Se divide la circunferencia en 24 horas, lo que hace que cada hora conste de 15 grados. Cada minuto tiene 15 minutos de arco y cada segundo 15 segundos de arco.

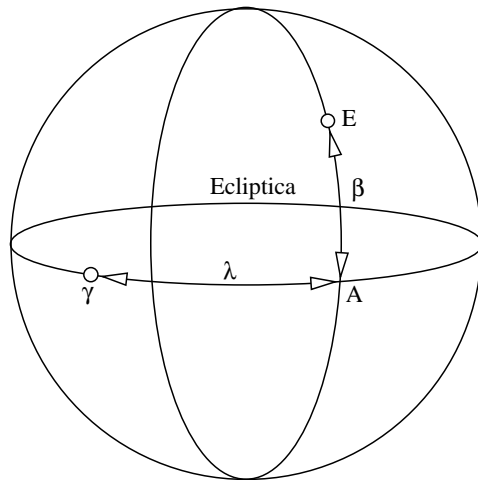


Figura 3.4

la Tierra) aparece sobre el horizonte con una elevación igual a la latitud geográfica del observador, es decir, $H\hat{O}P = O\hat{C}A$ ².

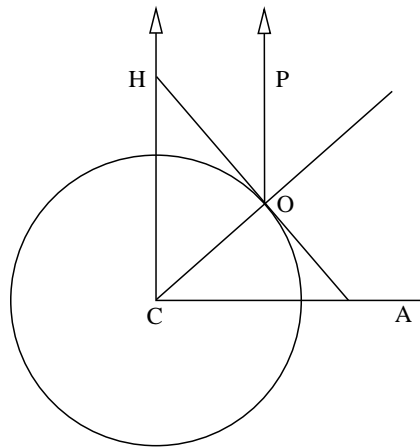


Figura 3.5

La intersección de la línea perpendicular en el punto O a la superficie de la Tierra corta a la esfera celeste en un punto que llamamos *cénit*. Al

²La Tierra no es perfectamente esférica, de manera que la línea que une el centro de la tierra con el observador y la línea perpendicular a la superficie terrestre en el punto del observador no son paralelas. Por eso es preciso distinguir entre la latitud geográfica y la latitud geodésica. Omitiremos aquí esta discusión, irrelevante para nuestro propósito

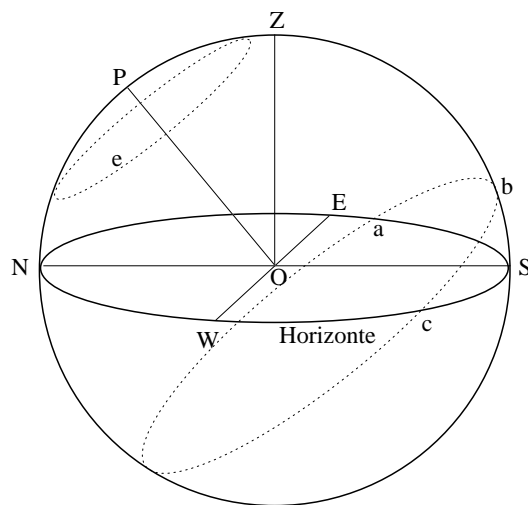


Figura 3.6

círculo secundario que contiene al polo norte y el cenit se le llama *meridiano local*. El meridiano local corta al horizonte en dos puntos, que son los puntos cardinales norte y sur.

Los astros parecen girar alrededor del polo norte. En la Figura (3.6) pueden verse punteadas dos de estas trayectorias. Si el astro está lo suficientemente cerca del polo, siempre se mostrará sobre el horizonte. Es la trayectoria que hemos nombrado como *e*. Si llamamos φ a la latitud del observador y $z = 90 - \delta$ al complemento de la declinación, llamado *distancia polar*, está claro que un astro se encuentra siempre sobre el horizonte si su distancia polar es inferior a la latitud del observador: $z \leq \varphi$. Cuando no se cumple esta condición, el astro describe su trayectoria aparente en parte sobre el horizonte y en parte bajo él. Si un observador se sitúa mirando hacia el sur, los astros aparecen hacia el este (punto *a*). A esta aparición se le llama *orto*. Después alcanzan su máxima altura sobre el horizonte hacia el sur (punto *b*) y comienzan la parte descendente hasta ocultarse de nuevo bajo el horizonte (punto *c*). A esta última desaparición se le llama *ocaso*.

Las coordenadas horizontales se denominan *acimut* y *altura* y se escriben (A, h) . El acimut se mide desde el punto sur en sentido horario. La altura desde el horizonte sobre el círculo secundario que contiene al astro. Si imaginamos una superficie horizontal y una varilla perpendicular a esa superficie, cuando el Sol tiene un acimut A la sombra de la varilla apunta en la dirección $180^\circ + A$.

Existe un segundo sistema de referencia que usa como plano fundamental el plano del ecuador. Se trata de las coordenadas horarias (H, δ). La ascensión recta se sustituye por el *ángulo horario*, que es el ángulo formado por el plano que contiene al polo y al astro y es perpendicular al plano ecuatorial y el plano que contiene al polo y al cenit. Se mide en horas, minutos y segundos en sentido horario, a partir del sur. En la Figura (3.7) se muestran las coordenadas horarias. El ángulo horario del astro D es el arco $AC = Z\hat{P}D$, mientras que la declinación es $\delta = AD$.

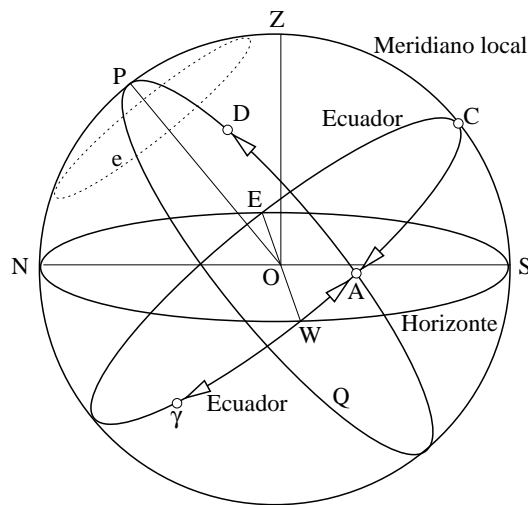


Figura 3.7

En este punto de nuestra discusión, podemos considerar que la Tierra gira con velocidad angular uniforme, y que el punto γ es un punto fijo en la esfera celeste. De esta forma, podemos usar el ángulo horario del punto γ , como una medida del tiempo. Cada vez que el punto γ pase por el meridiano local, comienza un nuevo día para el observador. Ahora bien, $\gamma\hat{A}$ es la ascensión recta del astro D , y se deduce de la Figura (3.7) la relación fundamental

$$T - \alpha = H \quad (3.1)$$

donde T se denomina *tiempo sidéreo* y H y α son respectivamente el ángulo horario y la ascensión recta del astro D .

3.2. Relación entre los distintos sistemas

Establezcamos en primer lugar la notación. Puesto que no estamos interesados en distancias, sino en direcciones, tomaremos como vector de posición de un astro los cosenos directores del vector unitario que apunta en su misma dirección y sentido. Llamaremos \bar{r}_p a las coordenadas perifocales. En función de la anomalía verdadera ν :

$$\bar{r}_p = \begin{bmatrix} \cos \nu \\ \text{sen } \nu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Escribiremos las coordenadas eclípticas como $\bar{r}_{\lambda,\beta}$:

$$\bar{r}_{\lambda,\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \text{sen } \lambda \\ \text{sen } \beta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

El plano fundamental de ambas es el mismo. Para las coordenadas eclípticas, el eje x se dirige desde el origen al punto γ , el eje y se dirige hacia el punto de longitud eclíptica 90^0 y el eje z completa un sistema dextrógiro, apuntando hacia el punto de latitud eclíptica 90^0 . Llamaremos $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ a los versores en las direcciones x, y y z . El sistema rectangular eclíptico se transforma en el sistema perifocal mediante una simple rotación de argumento ω , longitud del periapsis, alrededor del eje z , y por tanto

$$\bar{r}_{\lambda,\beta} = \mathbf{R}_{\hat{k},\omega} \bar{r}_p \quad (3.4)$$

Si ϵ es la inclinación de la eclíptica respecto al ecuador, el sistema eclíptico se obtiene a partir del ecuatorial mediante un giro de magnitud ϵ alrededor del eje x , de forma que

$$\bar{r}_{\alpha,\delta} = \mathbf{R}_{\hat{i},\epsilon} \bar{r}_{\lambda,\beta} \quad (3.5)$$

con

$$\bar{r}_{\alpha,\delta} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \text{sen } \alpha \\ \text{sen } \delta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

De la ecuación (3.1) se sigue que el sistema horario se obtiene a partir del sistema ecuatorial mediante una rotación de sentido antihorario y magnitud T . Ahora bien, el ángulo horario se mide en sentido contrario a la ascensión recta. En el sistema horario, el eje x se dirige hacia el sur y el eje z hacia el polo norte celeste. Si dirigimos el eje y hacia el punto del ecuador con ángulo horario 90^0 , tenemos un sistema de referencia levógiro y las matrices de transformación que hemos construido no son válidas, porque no es posible por simple giro hacer coincidir un sistema de ejes *dextro* con un sistema de ejes *levo*. El artificio que resuelve este problema parte de la observación de que el sistema levógiro horario se obtiene a partir del sistema dextrógiro que deseamos (eje y en la dirección del ángulo horario 270^0) por inversión del eje y . O lo que es igual, en un sistema dextrógiro, al hablar de un ángulo horario de H querríamos decir un giro de $360^0 - H$. En cualquier caso, el resultado es un cambio de signo en la segunda componente de las coordenadas horarias, de manera que

$$\bar{r}_{H,\delta} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sen H \\ \sen \delta \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Podemos entonces resolver la transformación en dos pasos: una inversión del eje y seguida de un giro T . La inversión se obtiene multiplicando las coordenadas horarias, medidas en el sistema levógiro (eje y hacia el punto con ángulo horario de 90^0), por la matriz

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Por tanto, podemos expresar las coordenadas horarias como de costumbre y escribir para la transformación entre ecuatoriales y horarias:

$$\bar{r}_{\alpha,\delta} = \mathbf{R}_{\hat{k},T} \mathbf{S} \bar{r}_{H,\delta} \quad (3.9)$$

donde ahora

$$\bar{r}_{H,\delta} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos H \\ \cos \delta \sen H \\ \sen \delta \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

El problema no existe para transformar el sistema horizontal en el sistema horario, ya que basta efectuar un giro de $\varphi - 90^0$ alrededor del eje y :

$$\bar{r}_{A,h} = \mathbf{R}_{\hat{j}, \varphi - 90^0} \bar{r}_{H,\delta} \quad (3.11)$$

¿Cual es el objeto de todas estas transformaciones? Imaginemos que deseamos calcular la sombra del sol, proyectada sobre un plano por un gnomon. Sobre el plano, disponemos de un sistema de referencia (x, y) . El extremo del gnomon tiene coordenadas (x, y, z) , y deseamos obtener su sombra sobre el plano (x, y) un determinado día del año y para un lugar situado a una latitud determinada. A partir del día del año podemos calcular la anomalía media en coordenadas perifocales. De la anomalía media obtenemos mediante la ecuación de Kepler la anomalía excéntrica, y a partir de ésta la anomalía verdadera, que nos dá las coordenadas perifocales del sol. A partir de las coordenadas perifocales obtenemos las coordenadas eclípticas, y de éstas las ecuatoriales. De las ecuatoriales las horarias, supuesto conocido T (la obtención de T queda para el próximo capítulo) de éstas las horizontales y finalmente a partir de las horizontales las coordenadas en el sistema del reloj. Ahora, sólo queda proyectar el extremo del gnomon según la dirección del sol sobre el plano (x, y) .

3.3. Proyección de un punto sobre un plano

En relación con la Figura (3.8), sea el vector que apunta al punto P , de coordenadas (x, y, z) . Este punto ha de proyectarse sobre el plano (x, y) según la dirección del vector \hat{u} . Cualquier punto de la línea PQ es la suma vectorial de $\bar{P} + r\hat{u}$, para cierto valor de r . En particular, puesto que Q se encuentra sobre el plano (x, y) , existirán ciertos valores de λ , μ y r que hagan que se cumpla la ecuación

$$\bar{P} + r\hat{u} = \lambda\hat{i} + \mu\hat{j} \quad (3.12)$$

Multiplicando escalarmente por \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} tenemos las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{P} \cdot \hat{i} + r\hat{u} \cdot \hat{i} &= \lambda \\ \bar{P} \cdot \hat{j} + r\hat{u} \cdot \hat{j} &= \mu \\ \bar{P} \cdot \hat{k} + r\hat{u} \cdot \hat{k} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

De la tercera

$$r = -\frac{\bar{P} \cdot \hat{k}}{\hat{u} \cdot \hat{k}} \quad (3.14)$$

Conocido r , λ y μ son las coordenadas del punto Q , y el problema queda resuelto.

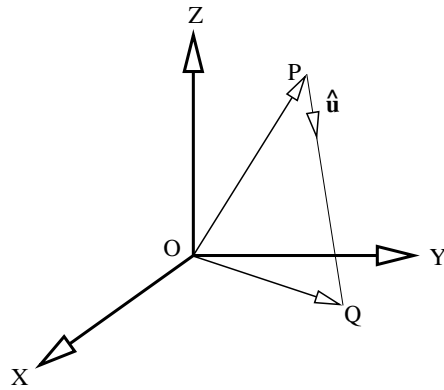


Figura 3.8

Capítulo 4

Tiempo

4.1. Tiempo sidéreo y tiempo solar

Como es sabido, las ecuaciones dinámicas de Newton de un sistema mecánico son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden respecto al tiempo. Si se dispone de una solución, quiere decirse que son funciones conocidas del tiempo las variables que determinan la configuración del sistema. Fijando un instante inicial como origen de tiempos, y con la condición de que esas soluciones sean invertibles, podríamos obtener un valor de t para valor de alguna de las variables dinámicas. Cuando alguna de estas variables puede medirse, el sistema puede usarse como reloj. Un caso conveniente ocurre cuando la relación entre el tiempo t y una variable x es lineal

$$t = ax + b \tag{4.1}$$

El problema práctica se plantea entonces en los siguientes términos: encontrar un sistema (o construirlo a propósito) alguna de cuyas variables de estado x dependa linealmente del tiempo t , que sea estable y reproducible, de tal forma que las distintas copias que se construyan puedan sincronizarse entre sí. La historia de un sistema de estas características es la historia, fascinante, de la cronometría mecánica. Sin embargo, en lugar de que distintos observadores dispongan cada uno de un reloj sincronizado con otro que se adopte como patrón existe la alternativa de que todos los observadores usen *el mismo* sistema físico para medir el tiempo. Y el más obvio de tales sistemas, accesible para todos los observadores, es la Tierra.

Al aceptar que la Tierra gira con velocidad angular constante, sólo es preciso elegir un punto fijo en el cielo. Cada vez que ese punto atraviese

el meridiano local, comenzará un día. El punto elegido es el punto γ , y al intervalo entre dos pasos sucesivos de γ por el meridiano local se llama *día sidéreo*. El ángulo horario de γ es entonces la medida numérica del tiempo sidéreo: 15° equivalen a una hora sidérea.

Sin embargo, es el Sol la referencia más evidente para acompasar la vida de los individuos y de las sociedades. ¿Porqué no elegir el paso del Sol por el meridiano local para medir el tiempo? El problema es que la duración de este día solar no es constante, sino que varía a lo largo del año. En efecto, en relación con la Figura (4.1), sea S el centro del Sol, O el centro de la Tierra al inicio de un día sidéreo y P el centro de la Tierra al inicio del día sidéreo siguiente. Eligiendo la dirección OS como dirección fija en el espacio vemos que en el transcurso de una rotación terrestre la Tierra se ha desplazado al punto P de su órbita. Se ha cumplido un día sidéreo pero aún resta una fracción de rotación igual al ángulo $R\hat{P}Q$ para que se cumpla el día solar. Sabemos que aproximadamente el año tiene 365 días, que en un día la Tierra recorre por término medio $360^{\circ}/365$ y que ésto equivale a unos cuatro minutos. El día solar es por tanto unos cuatro minutos más largo que el día sidéreo.

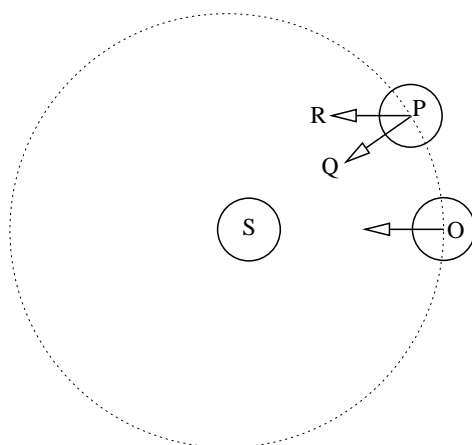


Figura 4.1

Ahora bien, el movimiento de la Tierra en su órbita no es uniforme. El ángulo $R\hat{P}Q$ es mayor cerca del periapsis y menor en el apoapsis, de acuerdo con la ley de las áreas y esto hace dificultosa la conversión de hora solar a

hora sidérea. Mientras que el tiempo sidéreo es uniforme ¹ el tiempo solar no lo es.

4.2. Soles ficticios

Hemos dicho que de la observación del Sol verdadero no puede obtenerse una medida uniforme del tiempo debido a que el movimiento de traslación de la Tierra en su órbita es irregular. Podríamos entonces definir un *Sol medio* que se moviese por la eclíptica con velocidad angular constante de tal manera que coincidiese en el punto γ con el Sol verdadero cada vez que éste pasase por dicho nodo. De esta forma, la longitud eclíptica del Sol medio λ_M se correspondería con la anomalía media (salvo una constante que tuviese en cuenta la latitud del periapsis ω) del movimiento orbital de la Tierra, mientras que la longitud eclíptica del Sol verdadero λ_v se correspondería con la anomalía verdadera. Sabemos que la anomalía media está relacionada con la excéntrica a través de la ecuación de Kepler, y la excéntrica con la verdadera a través de (2.40). Por tanto, es posible calcular en cada instante la diferencia $\lambda_v - \lambda_M$.

Ahora bien, existe una segunda causa que hace irregular el tiempo medio medido a partir del Sol medio que acabamos de definir, y que llamaremos primer Sol ficticio, y es que éste se mueve en la eclíptica, mientras que el ángulo horario se mide sobre el ecuador, inclinado respecto a la primera. Es preciso por este motivo introducir un segundo Sol ficticio, que coincide con el Sol verdadero y con el primer Sol ficticio en el punto γ y que se mueve con velocidad angular constante sobre el ecuador, no sobre la eclíptica. Es éste segundo Sol ficticio el que se emplea para fabricar los relojes que regulan la vida civil. El plan por tanto consiste en poner en relación el Sol verdadero con el segundo Sol ficticio. De esta forma, para una hora civil determinada es posible calcular la posición del Sol verdadero, y de ahí obtener la proyección del gnomon de un reloj de sol.

4.3. Ecuación de tiempo

Se define la ecuación de tiempo como la diferencia entre los ángulos horarios de los soles medio y verdadero:

¹Prescindiremos de la prolija discusión sobre el movimiento del punto γ , que no es sino aproximadamente fijo sobre la esfera celeste debido a los movimientos de nutación y precesión del eje de la Tierra y a otros efectos menores

$$ET = H_M - H_v \quad (4.2)$$

De la relación fundamental $T = H + \alpha = H_M + \alpha_M = H_v + \alpha_v$ se sigue

$$ET = \alpha_v - \alpha_M = \alpha_v - \lambda_M \quad (4.3)$$

que a su vez se puede escribir como

$$ET = (\lambda_v - \lambda_M) + (\alpha_v - \lambda_v) = (v - M) + (\alpha_v - \lambda_v) \quad (4.4)$$

Al primer término se le llama *ecuación del centro C* y al segundo *reducción al ecuador R*.

4.4. Reducción al ecuador

Recordemos la relación

$$\bar{r}_{\alpha,\delta} = \mathbf{R}_{\hat{i},\epsilon} \bar{r}_{\lambda,\beta} \quad (4.5)$$

Desarrollándola en sus tres componentes, dividiendo la segunda entre la primera y teniendo en cuenta que la latitud eclíptica del Sol es cero:

$$\tan \alpha = \cos \epsilon \tan \lambda \quad (4.6)$$

pero

$$\cos \epsilon = \cos^2 \frac{\epsilon}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\epsilon}{2} \quad (4.7)$$

o

$$\frac{\cos \epsilon}{\cos^2 \frac{\epsilon}{2}} = 1 - \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \quad (4.8)$$

y por otra parte

$$1 = \cos^2 \frac{\epsilon}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\epsilon}{2} \quad (4.9)$$

de donde

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\epsilon}{2}} = 1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \quad (4.10)$$

En resumen

$$\cos \epsilon = \frac{\cos \epsilon}{1} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\epsilon}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\epsilon}{2}} \quad (4.11)$$

Llamando

$$m = \tan^2 \frac{\epsilon}{2} \quad (4.12)$$

tenemos finalmente

$$\tan \alpha = \frac{1 - m}{1 + m} \tan \lambda \quad (4.13)$$

ecuación que admite el desarrollo en serie

$$\alpha = \lambda - m \operatorname{sen}(2\lambda) + \frac{m^2}{2} \operatorname{sen}(4\lambda) - \frac{m^3}{3} \operatorname{sen}(6\lambda) + \dots \quad (4.14)$$

Si aplicamos esta relación a la ascensión recta y longitud eclíptica del Sol verdadero, tenemos para la reducción al ecuador la expresión

$$\alpha_v - \lambda_v = -m \operatorname{sen}(2\lambda_v) + \frac{m^2}{2} \operatorname{sen}(4\lambda_v) - \frac{m^3}{3} \operatorname{sen}(6\lambda_v) + \dots \quad (4.15)$$

4.5. Ecuación del centro

Partiremos de la ecuación de Kepler, a la que aplicaremos el procedimiento indicado al final de la sección 2.7. En efecto, de

$$E = M + e \operatorname{sen} E \quad (4.16)$$

tomando en primera aproximación $E^{(0)} = M$, las sucesivas aproximaciones se escriben

$$E^{(1)} = M + e \operatorname{sen}(E^{(0)}) \quad (4.17)$$

$$E^{(2)} = M + e \operatorname{sen}(E^{(1)}) \quad (4.18)$$

$$E^{(3)} = M + e \operatorname{sen}(E^{(2)}) \dots \quad (4.19)$$

Así, para $E^{(2)}$:

$$E^{(2)} = M + e \operatorname{sen}(M + e \operatorname{sen}(M)) \quad (4.20)$$

Al desarrollar la ecuación anterior, advertimos que la excentricidad de la órbita terrestre es muy pequeña y podemos tomar, en los términos que la contengan, el seno por su arco e igualar el coseno a la unidad

$$E^{(2)} = M + e \operatorname{sen}(M) + e^2 \operatorname{sen}(M) \cos(M) = M + e \operatorname{sen}(M) + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen}(2M) \quad (4.21)$$

El procedimiento puede extenderse, buscando sucesivas aproximaciones. Hasta e^3 se tiene

$$E = M + (e - \frac{e^3}{8} + \dots) \operatorname{sen}(M) + (\frac{e^2}{2} + \dots) \operatorname{sen}(2M) + (\frac{3}{8}e^3 + \dots) \operatorname{sen}(3M) + \dots \quad (4.22)$$

o mejor, agrupando los términos que contienen potencias iguales de e :

$$\begin{aligned} E = & M + e \operatorname{sen}(M) + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen}(2M) \\ & + \frac{e^3}{3! \times 2^2} (3^2 \operatorname{sen}(3M) - 3 \operatorname{sen}(M)) \\ & + \frac{e^4}{4! \times 2^3} (4^3 \operatorname{sen}(4M) - 4 \times 2^3 \operatorname{sen}(2M)) \\ & + \frac{e^5}{5! \times 2^4} (5^4 \operatorname{sen}(5M) - 5 \times 3^4 \operatorname{sen}(3M) + 10 \operatorname{sen}(M)) \\ & + \frac{e^6}{6! \times 2^5} (6^5 \operatorname{sen}(6M) - 6 \times 4^5 \operatorname{sen}(4M) + 15 \times 2^5 \operatorname{sen}(2M)) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por otra parte, de (2.41) (donde cambiamos ligeramente la notación, sustituyendo θ por v)

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}dM}{(1-e\cos E)^2} = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{dE}{dM} \right)^2 dM \quad (4.24)$$

Pero como ya disponemos de $E(M)$, dada por (4.23), podemos calcular la derivada, elevar al cuadrado, multiplicar por el desarrollo de $\sqrt{1-e^2}$, agrupando potencias iguales de e , e integrar. El resultado final es el siguiente:

$$\begin{aligned} v = & M + 2e \operatorname{sen}(M) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen}(2M) \\ & + \frac{e^3}{12}(13 \operatorname{sen}(3M) - 3 \operatorname{sen}(M)) \\ & + \frac{e^4}{96}(103 \operatorname{sen}(4M) - 44 \operatorname{sen}(2M)) \\ & + \frac{e^5}{960}(1097 \operatorname{sen}(5M) - 645 \operatorname{sen}(3M) + 50 \operatorname{sen}(M)) \\ & + \frac{e^6}{960}(1223 \operatorname{sen}(6M) - 902 \operatorname{sen}(4M) + 85 \operatorname{sen}(2M)) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

Estas series son rápidamente convergentes cuando e es pequeña, como es el caso cuando hablamos de la órbita de la Tierra, pero divergen cuando e excede el valor crítico de 0,6627, como demostró en primer lugar Laplace ².

Volviendo a la ecuación de tiempo, teniendo en mente la ecuación del centro podemos escribir la longitud verdadera del Sol en función de la longitud media:

$$\lambda_v = \lambda_m + 2e \operatorname{sen}(\lambda_m) + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen}(2\lambda_m) + \dots \quad (4.26)$$

Sustituyendo esta ecuación en cada uno de los términos del segundo miembro de la reducción al ecuador, teniendo en cuenta que

$$\lambda_m = \omega + M - 360^0 \quad (4.27)$$

²F.R. Moulton *An introduction to celestial mechanics*

y sumando ya la reducción al ecuador y la ecuación del centro, es posible escribir la ecuación de tiempo en función de la anomalía media M . Aunque a efectos prácticos tanto la inclinación de la eclíptica, de donde se obtiene m , como la longitud del perihelio ω pueden tomarse como constantes, la realidad es que varían lentamente. Posponemos hasta el final del presente capítulo las expresiones que dan ambas cantidades en función del tiempo, pues es preciso antes hablar del periodo juliano. No obstante, nos adelantamos a ese momento y usamos las expresiones que aparecen allí para calcular la ecuación de tiempo, que representamos en la Figura (4.2)

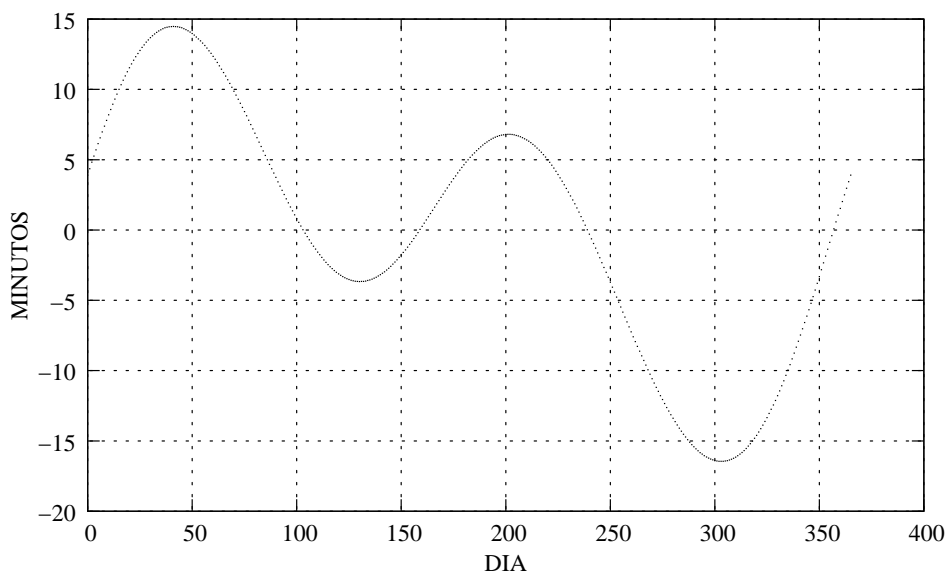


Figura 4.2

4.6. Tiempo civil

El segundo Sol ficticio por tanto nos proporciona un tiempo uniforme. Para un lugar dado, su ángulo horario en horas, minutos y segundos representa el valor de la hora solar media. Esta hora solar media puede ser útil para el astrónomo, porque hace que las observaciones que se realicen a lo largo de una misma noche pertenezcan todas al mismo día. Pero en la vida civil es preferible que el cambio de fecha se produzca de noche, así que se define un nuevo tiempo, el *Tiempo Civil* (TC) a partir del *Tiempo Solar Medio* (TSM) como

$$TC = TSM \pm 12H \quad (4.28)$$

La siguiente cuestión a resolver es que tanto el tiempo sidéreo como el tiempo solar medio como el tiempo civil son tiempos locales. En un mismo instante de tiempo, dos observadores situados en dos meridianos distintos medirán tiempos distintos. La solución consiste en escoger un meridiano de referencia: el ángulo horario del punto γ respecto a dicho meridiano proporciona el tiempo sidéreo para todos los observadores (todos los observadores comparten el mismo reloj) y el ángulo horario del sol medio (segundo Sol ficticio) respecto al meridiano de referencia, el que pasa por el Observatorio de Greenwich, proporciona el tiempo solar medio y por tanto la hora civil, que es la que marcan nuestros relojes de pulsera.

Pero en el diseño de un reloj de Sol es preciso conocer para cada instante (civil) el ángulo horario local. ¿Qué relación existe entre la hora local y la hora de referencia? Si λ_g es la longitud geográfica del lugar de observación, expresada en horas, minutos y segundos, es claro que la primera se obtiene sumando λ_g a la segunda si la longitud del observador es Este, y restando si es Oeste.

4.7. El periodo Juliano

En primer lugar, es preciso no confundir el periodo o fecha juliana con el calendario juliano, instaurado por Julio César en el año 46 a. de C. y vigente hasta 1582, cuando fue sustituido por el calendario gregoriano. En el origen de estas reformas del calendario se encuentra el hecho de que el periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol no se expresa como un número entero de días medios, sino como un número fraccionario: aproximadamente 365,25.

El uso del calendario gregoriano, donde se indican año, mes, día y hora tiene la desventaja desde el punto de vista del astrónomo de que hace difíciles los cálculos, y en particular el cómputo de los días transcurridos entre dos acontecimientos, más aún si el periodo transcurrido abarca épocas históricas que incluyen reformas en el calendario. Por ejemplo, en 1582 se sustituyó el calendario juliano por el gregoriano, suprimiéndose diez días y modificándose el cómputo de los años bisiestos.

Por estos motivos, José Escálinger propuso computar los días simplemente numerándolos sucesivamente a partir de uno adoptado como día cero. El día juliano ³0 comenzó a las 12 horas del día 1 de enero de 4713 a. de C., fecha no arbitraria, pero cuya justificación omitimos aquí. En definitiva, cada vez que el Sol medio cruza el meridiano, comienza un nuevo día juliano. Por tanto, existe un desfase de doce horas entre el inicio del día civil y el inicio del día juliano. Cuando se pretende identificar con un número real un instante determinado en el periodo juliano, se añade al día juliano de la fecha que corresponda la fracción de día transcurrida. Pero debido al desfase indicado, es preciso considerar el caso en que esta fracción es menor que medio día y el caso en que es mayor. En el que caso de que hayan transcurrido menos de 12 horas, es decir, si aún no se ha alcanzado el mediodía civil de la fecha que se esté considerando, ese instante pertenece al día juliano anterior, y por tanto habrá que sumarle al día juliano anterior medio día (la tarde anterior) más la fracción de día. En caso de que la hora sea posterior al mediodía, será preciso restarle a la fracción las doce horas de la mañana. En definitiva, en cualquier de los dos casos:

$$DJ_h = DJ_m + f - 0,5 \quad (4.29)$$

donde DJ_h es el día juliano para la hora h , DJ_m el día juliano a mediodía de la fecha que se considere y f la fracción de día transcurrida desde la medianoche. Existen algoritmos, unos más evidentes y otros menos, para calcular el día juliano correspondiente a una fecha del calendario gregoriano. El más sencillo haya en primer lugar el día juliano correspondiente al primer día del año, y luego suma a esa cantidad el número de días transcurridos desde el comienzo del año. Sin necesidad de entrar en detalles, y sólo a título informativo, el siguiente código en lenguaje C calcula DJ_m para una fecha del calendario gregoriano:

```
int djm(int anio, int mes, int dia)
{
    int DJM,a,y,m;

    a=(14-mes)/12;
    y=anio+4800-a;
    m=mes+12*a-3;
```

³José Escaliger bautizó a su escala como periodo juliano en honor a su padre, Julio Escálinger

```

    DJM=dia+(153*m+2)/5+365*y+y/4-y/100+y/400-32045;
    return(DJM);
}

```

Nótese que usamos aritmética entera y que suponemos que el tipo entero es de un número de bits suficiente para representar los valores de DJM . El valor devuelto por la función es el del día juliano que comienza a mediodía de la fecha del calendario gregoriano ⁴. Esta rutina indexa los meses desde 1, al igual que los días; otras rutinas indexan desde 0. En definitiva, es preciso saber en cada caso qué se está calculando exactamente.

4.8. Tiempo sidéreo a 0h de tiempo universal

Lo importante es que tanto el tiempo sidéreo como el día juliano, que se basa en el Sol medio (segundo Sol ficticio) son escalas uniformes de tiempo ⁵. Por consiguiente, la relación entre ellas es una relación lineal. Dicho de otra forma, para cualquier intervalo físico de tiempo la medición del mismo mediante la escala de tiempo sidéreo y la medición mediante la escala de tiempo medio están siempre en una proporción constante. Si denominamos IS al intervalo sidéreo e IM al intervalo medio, se deduce de las observaciones que

$$\begin{aligned}
 IS &= 0,99726957 \times IM \\
 IM &= 1,00273790 \times IS
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

¿Cómo se engarzan estos conceptos con las transformaciones geométricas que nos dan la posición del Sol y por tanto nos permiten calcular su sombra? Si supiésemos qué tiempo sidéreo era a las 0h de tiempo universal, podríamos mediante (4.30) averiguar el intervalo sidéreo transcurrido desde las 0h hasta una hora dada. Entonces, la ecuación (3.1) nos permitiría encontrar el ángulo horario del Sol, y a partir de ahí sus coordenadas en cualquier otro sistema. El plan al completo es así: para un día del año dado, conocemos la anomalía media del Sol verdadero, y por tanto, a partir de la anomalía excéntrica, la anomalía verdadera en coordenadas perifocales. Podemos transformar estas

⁴La aclaración es pertinente, porque otros algoritmos lo que ofrecen es el instante juliano en el comienzo (0 horas) del día del calendario gregoriano, y por tanto difiere del que calculamos en la función $djm()$ en medio día

⁵A efectos prácticos.

coordenadas a coordenadas horarias, y mediante la ecuación de tiempo obtener, a partir del ángulo horario del Sol medio, directamente relacionado con la hora que marca nuestro reloj de pulsera, el ángulo horario del Sol verdadero, y a partir de él obtener la sombra por proyección.

Así que es el tiempo sidéreo a 0h de tiempo universal el que nos permite pasar de coordenadas ecuatoriales a coordenadas horarias. Puesto que el tiempo sidéreo y el tiempo medio se relacionan linealmente (al ser ambas escalas de tiempo uniforme), una relación lineal será la que proporcione el valor que necesitamos. De las observaciones se deduce la expresión siguiente, que contiene un término cuadrático debido a que, en rigor, el punto γ no es un punto fijo sobre la esfera celeste, sino que está afectado por los movimientos de precesión y nutación:

$$\theta_0 = 99^0,6909833 + 36000^0,7689 \times U + 0^0,00038708 \times U^2 \quad (4.31)$$

con

$$U = \frac{DJ_h - 2415020,0}{36525} \quad (4.32)$$

Parece necesario terminar esta sección con un ejemplo numérico. Calcularemos el tiempo sidéreo de Greenwich y el tiempo sidéreo local de un punto de longitud geográfica $\lambda = 37^012'44''$ Oeste a las 14h 33m 27s de hora civil del día 1 de enero de 1971.

En primer lugar, es preciso tener en cuenta que la rutina `djm()` proporciona el día juliano que comienza a las 12 horas de la fecha gregoriana que se considere. En la ecuación (4.32), por tanto, $DJ_h = DJ_m - 0,5$. Con esta precaución, de (4.31) obtenemos un valor para θ_0 , que reducimos restando 360^0 tantas veces como sea preciso hasta que $0^0 \leq \theta_0 < 360^0$. Transformamos los grados resultantes en horas y fracción dividiendo por 15 y tenemos

$$\theta_0 = 6,666146 \quad (4.33)$$

Este es el tiempo sidéreo a 0 horas de tiempo universal en la fecha considerada. Se pide la hora sidérea a 14h 33m 27s de hora civil. Escribimos esta hora en forma de horas y fracción de hora, multiplicamos por el factor 0,99726957

para obtener el intervalo sidéreo transcurrido desde la medianoche y sumamos el resultado a la hora sidérea de la medianoche civil. El resultado es la hora sidérea que buscamos:

$$T = 21,183898 \quad (4.34)$$

equivalente a 21h 11m 2s. Respecto al punto de longitud geográfica $\lambda = 37^0,212222$, teniendo en cuenta que la tierra gira en 24 horas sidéreas, transformando la longitud en tiempo: $\lambda = 2,480815$ horas sidéreas, que hemos de restar (longitud Oeste) de la hora sidérea en Greenwich para obtener su hora local, que resulta ser de $T = 18,703083$ horas sidéreas, o 18h 42m 11s.

Resumiendo, para un lugar de longitud geográfica dada, a hora civil dada (la hora del reloj de pulsera) podemos calcular la hora sidérea local, y a partir de ella y la ascensión recta del Sol su ángulo horario. La transformación entre coordenadas horarias y horizontales nos proporciona la altura y acimut del Sol, y por tanto la proyección de la sombra.

Para finalizar damos a modo de referencia las expresiones para la inclinación de la eclíptica y la longitud del perihelio, usadas en el cálculo de la ecuación de tiempo y que pospusimos hasta este momento porque era preciso hablar del periodo juliano. Son éstas:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 23^0,452294 - 0^0,130125 \times 10^{-1}U - 0^0,163889 \times 10^{-5}U^2 + \dots \\ \omega &= 281^0,220833 + 1^0,719175U + 0^0,452778 \times 10^{-3}U^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.35)$$

Capítulo 5

Geometría del cuadrante solar

5.1. Orto y ocaso

Calcularemos los momentos del orto y ocaso del Sol. A efectos de la construcción de un reloj de Sol, el horizonte rara vez es visible, pero estos instantes acotan las horas que hemos de representar. El cálculo se refiere al centro del Sol, no al limbo superior, y omite la refracción atmosférica, que para elevaciones próximas a cero es importante.

Los sistemas relevantes aquí son el horario y el horizontal, ambos con el eje x dirigido hacia el Sur (meridiano local), el eje y hacia el Este y el eje z completando un sistema dextro: en el sistema horizontal hacia el cenit, en el horario hacia el polo norte celeste. Las coordenadas en ambos sistemas, teniendo en cuenta que tanto el ángulo horario como el acimut se miden en sentido horario son

$$\bar{r}_{A,h} = \begin{bmatrix} \cos h \cos A \\ -\cos h \sin A \\ \sin h \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\bar{r}_{H,\delta} = \begin{bmatrix} \cos \delta \cos H \\ -\cos \delta \sin H \\ \sin \delta \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Si φ es la latitud del lugar de observación, teniendo en cuenta la orientación de los ejes y que la distancia entre el polo y el cenit del observador es $90^\circ - \varphi$, vemos que el paso del sistema horizontal al horario se produce mediante un giro antihorario de magnitud $360^\circ - (90^\circ - \varphi) = 270^\circ + \varphi$.

$$\bar{r}_{A,h} = \mathbf{R}_{\hat{j},270+\varphi} \bar{r}_{H,\delta} \quad (5.3)$$

Desarrollando esta ecuación en sus componentes:

$$\begin{aligned} \cos h \cos A &= \sin \varphi \cos \delta \cos H - \cos \varphi \sin \delta \\ \cos h \sin A &= \cos \delta \sin H \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \end{aligned} \quad (5.4)$$

De la tercera, teniendo en cuenta que al orto y al ocaso $h = 0$, se sigue

$$\cos H = -\tan \varphi \tan \delta \quad (5.5)$$

o

$$H = \cos^{-1}(-\tan \varphi \tan \delta) \quad (5.6)$$

Existen dos soluciones posibles para la ecuación anterior, una para el orto y otra para el ocaso. El orto se encuentra en los cuadrantes tercero o cuarto, y el ocaso en los cuadrantes primero o segundo. Hemos escrito un programa C que obtiene H . La función `acos()` devuelve un ángulo en el primer o segundo cuadrante, de manera que al calcular el ocaso se obtiene directamente la solución. Por simetría, se ve que si H es el ángulo horario al ocaso, el ángulo horario al orto ha de ser $360^\circ - H$.

Una vez conocido H y la ascensión recta del Sol es posible obtener el tiempo sidéreo, y a partir de ahí la hora civil. Por otra parte, la dos primeras de (5.4) nos dan $\sin A$ y $\cos A$, y por tanto nos permiten ubicar al acimut en el cuadrante correcto.

En relación con la Figura (5.1), hemos marcado con M la trayectoria sobre la esfera celeste de un punto con declinación $\delta > 0$. El punto P corresponde al orto, y el Q al ocaso.

Es claro que en general, para declinaciones positivas el ángulo horario en el orto se encuentra en el tercer cuadrante, y el ocaso en el segundo, mientras que para declinaciones negativas el orto se encuentra en el cuarto cuadrante y el ocaso en el primero. La tabla siguiente resume estos resultados:

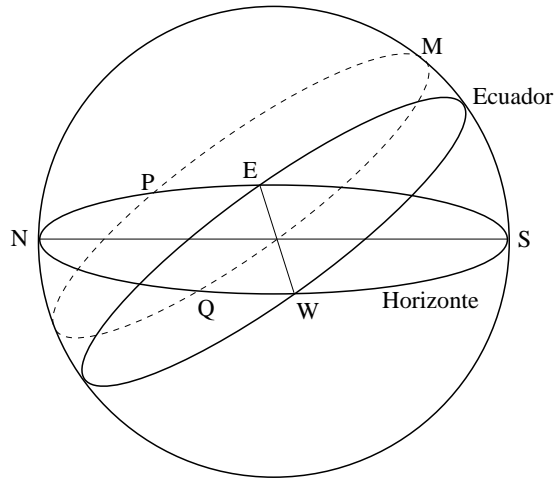


Figura 5.1

orto	$\delta > 0$	$12h \leq H \leq 18h$
orto	$\delta < 0$	$18h \leq H \leq 24h$
ocaso	$\delta > 0$	$6h \leq H \leq 12h$
ocaso	$\delta < 0$	$0h \leq H \leq 6h$

Finalmente, conocidas las horas del orto y del ocaso podemos calcular la duración del día. Queda el detalle de que para pasar el tiempo sidéreo a tiempo civil es preciso conocer la ascensión recta. El plan consiste entonces en, conocida la longitud eclíptica media, dada por

$$\lambda_m = \omega + M - 360^0 \quad (5.7)$$

calcular a partir de ella la longitud eclíptica verdadera, y de esta la ascensión recta verdadera. La relación $T = H + \alpha$ nos da el tiempo sidéreo y a partir de aquí obtenemos el tiempo civil, y el problema queda resuelto.

Vayamos a los detalles de este plan. Tenemos ya un desarrollo en serie que nos da la anomalía verdadera en función de la anomalía media, es decir, tenemos la longitud eclíptica verdadera a partir de la longitud eclíptica media. Queda el cálculo de la ascensión recta verdadera. Como los sistemas eclíptico y ecuatorial se relacionan mediante un giro $\mathbf{R}_{\hat{i}, \epsilon}$, desarrollando las componentes:

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \lambda$$

$$\begin{aligned}\cos \delta \operatorname{sen} \alpha &= \cos \epsilon \operatorname{sen} \lambda \\ \operatorname{sen} \delta &= \operatorname{sen} \epsilon \operatorname{sen} \lambda\end{aligned}\tag{5.8}$$

De la primera y la segunda

$$\tan \alpha = \cos \epsilon \tan \lambda\tag{5.9}$$

Con el tiempo sidéreo local y el tiempo sidéreo local a 0h de tiempo universal (para lo cual precisamos de la longitud geográfica del punto de observación) obtenemos el intervalo sidéreo transcurrido desde las 0h de tiempo universal hasta el momento del orto. Multiplicando por el factor 1,00273790 obtenemos el intervalo medio y por tanto la hora media local en que se produce el fenómeno.

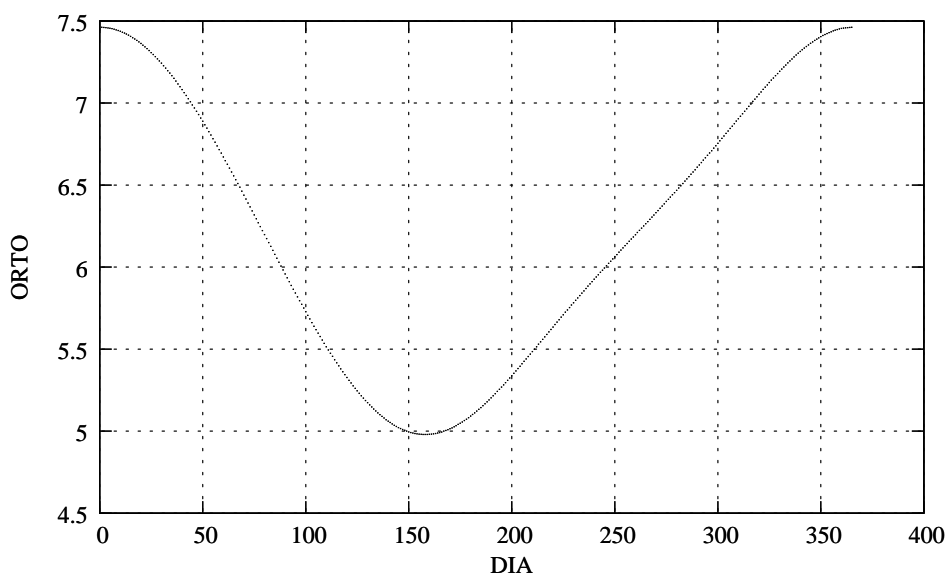


Figura 5.2

Las figuras (5.2) y (5.3) representan para cada día del año 2006 las horas del orto y del ocaso para un lugar de latitud geográfica $38^{\circ}23'57''$ y longitud geográfica Oeste $0^{\circ}31'21''$, omitiendo la corrección por refracción atmosférica.

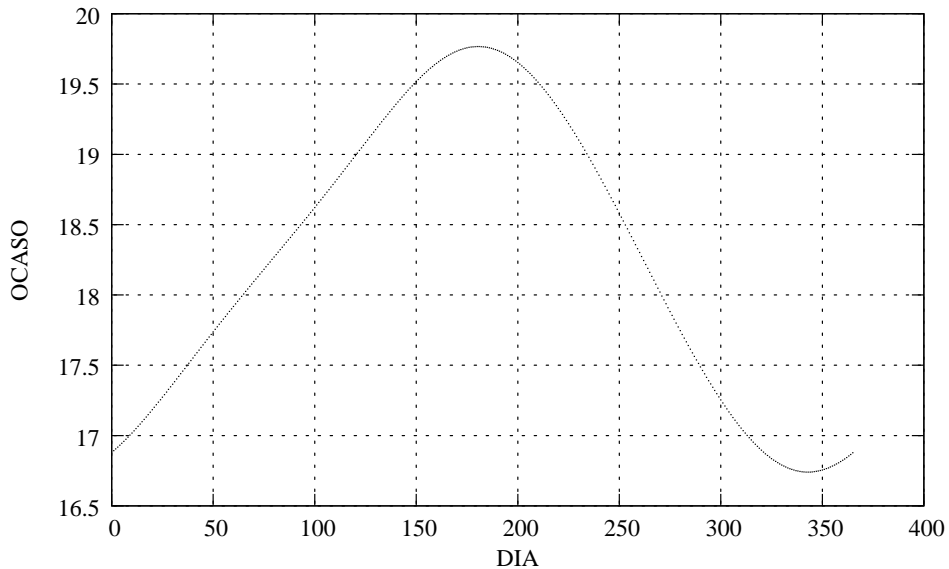


Figura 5.3

Las gráficas no tienen en cuenta la suma de dos horas adicionales en verano y una hora en invierno que se aplican por (discutibles) razones de ahorro energético.

En la Figura (5.4) se representa el acimut al orto y al ocaso para cada día del año.

Falta conocer la altura y el acimut del Sol para cualquier hora. Para una hora dada de nuestro reloj de pulsera, esa hora nos indica el intervalo medio transcurrido desde la 0H de tiempo universal, y por tanto el intervalo sidreo transcurrido. Conociendo la hora sidrea a 0H de tiempo universal obtenemos la hora sidrea, que junto a la ascensin recta nos da el ngulo horario del Sol; entonces, la tercera de (5.4) nos da la altura del Sol, sin ambigüedad, puesto que ha de ser siempre $h > 0$. Conocida la altura, las dos primeras ecuaciones proporcionan $\sin A$ y $\cos A$, lo cual nos permite ubicar al acimut en el cuadrante correcto.

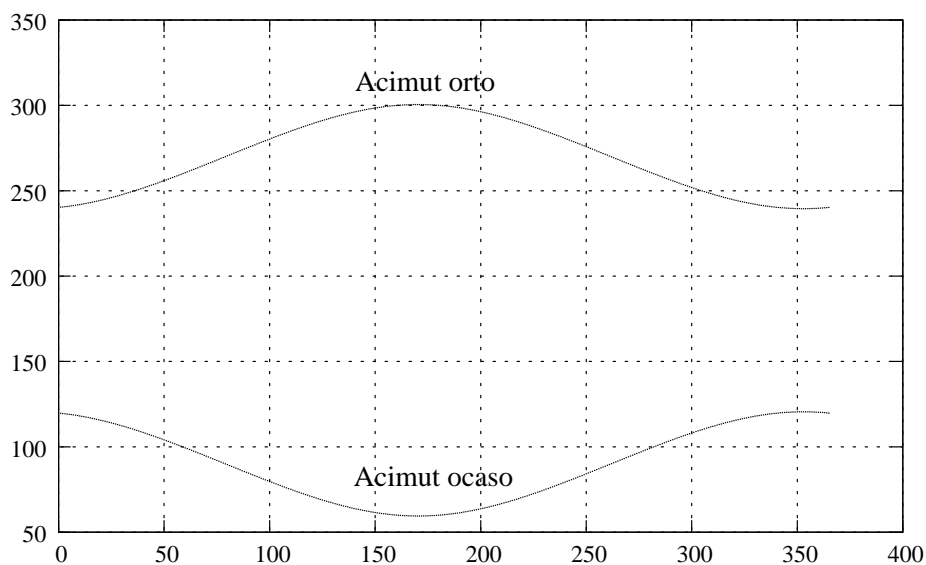


Figura 5.4

5.2. El analema

Se conoce como *analema* a la curva que representa, para cada día del año, la altura del Sol en función de su acimut para una hora determinada, fija para todos los días. En la Figura (5.5) se representa el analema para un lugar de latitud geográfica $38^{\circ}23'57''$ y longitud geográfica Oeste $0^{\circ}31'21''$, a las 12H. A partir de estas coordenadas podríamos proyectar el extremo del gnomon sobre el plano del reloj de Sol. Si trazamos la curva analemática para varias horas y unimos los puntos que en las distintas curvas representan un día determinado, tendremos para ese día la trayectoria que describe la sombra del extremo del gnomon. Algunos relojes de Sol usan este diseño, o variantes del mismo, consiguiendo tan sólo hacer más difícil la lectura de la hora.

En la Figura (5.5b) se representan los analemas de las 13h, 14h y 15h para un lugar de coordenadas geográficas $37^{\circ}53'N$ y $4^{\circ}48'W$

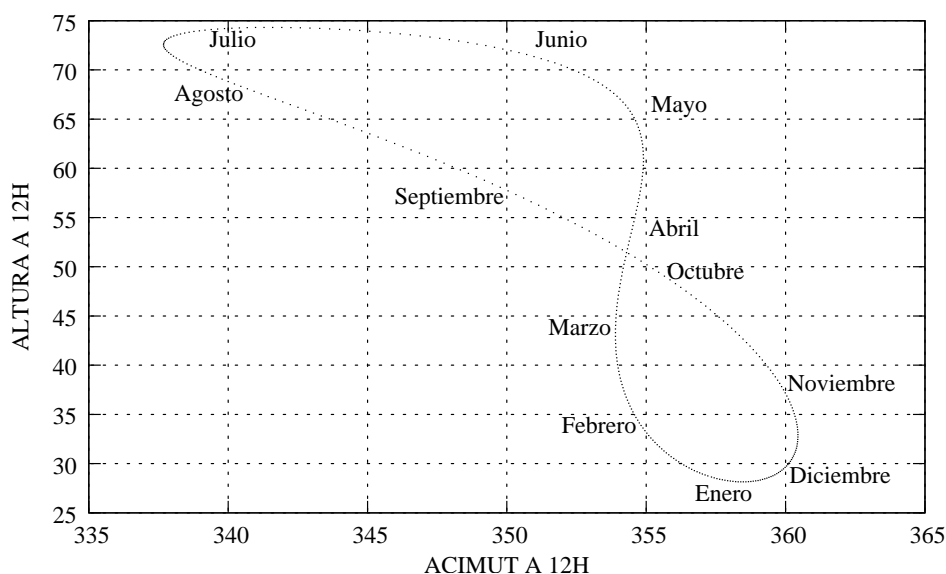


Figura 5.5

5.3. El reloj solar horizontal

El reloj horizontal es el más sencillo de los relojes solares, y quizás el primero que se utilizó, probablemente como una vara clavada en el suelo, cuya sombra cambiante indicaba el paso del tiempo. En relación con la Figura (5.6), G es el extremo del gnomon y Q su proyección sobre el plano horizontal. El ángulo $P\hat{Q}O$ es la altura del Sol. Si A es su acimut, $S\hat{O}P$ es el acimut de G , mientras que la distancia $\overline{OQ} = \cot h$, en unidades de \overline{OG} .

Hay varias posibilidades de diseño. Ya que la posición del Sol viene dada en cada momento por su altura y acimut, podemos elegir marcar la hora únicamente a partir del acimut, o únicamente a partir de la altura, o mediante ambas coordenadas. El diseño más común es el primero, ya que es el de más fácil lectura. El segundo método tiene el inconveniente de que cuando el Sol se encuentra cerca del horizonte la longitud de la sombra es excesivamente larga. El problema sin embargo puede resolverse, y algo más adelante hablaremos del reloj de sol cilíndrico, un diseño sencillo y elegante basado en la medida de la altura. Ahora bien, en su recorrido sobre el cielo, el Sol alcanza, a lo largo del día, dos veces la misma altura, una ascendiendo y otra descendiendo, y mientras es fácil distinguir las horas siguientes al orto de las horas previas al ocaso, mañana y tarde, puede resultar difícil, sin ninguna referencia adicional,

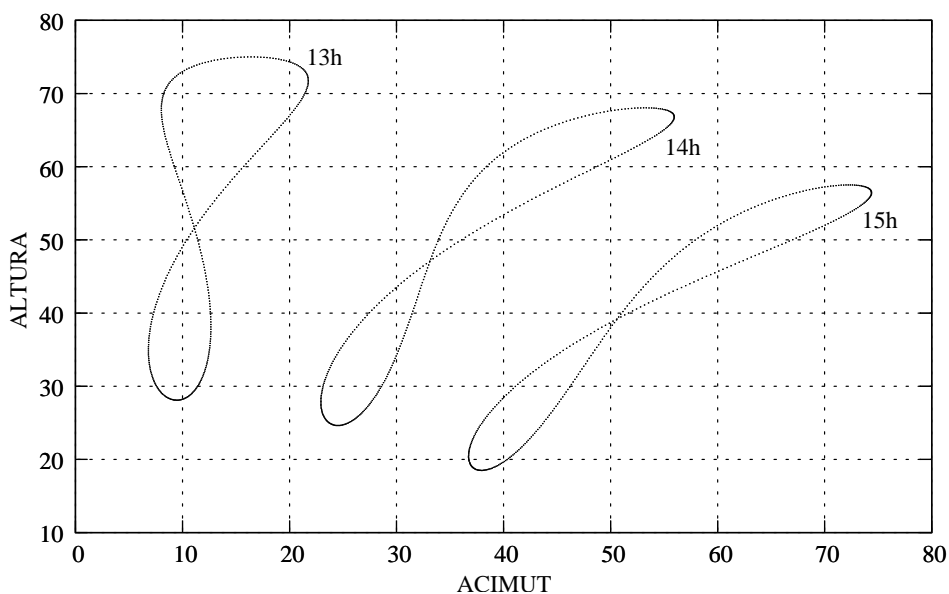


Figura 5.5b

distinguir las horas previas a mediodía de las horas posteriores (por ejemplo, las 11h30m de las 12h30m). Por otro lado, se deduce de la curva analemática que el acimut del Sol a una hora determinada depende del día en que se haga la observación. No es práctico superponer un conjunto de líneas para cada día, así que puede recurrirse a dos soluciones. La primera es la más común, y consiste en trazar un único conjunto de líneas para las horas. Si este conjunto se calcula para uno de los días en que la ecuación de tiempo es cero, para esos días el cuadrante será exacto. Para cualquier otro día se recurre a la ecuación de tiempo y se averigua a partir de ella qué corrección es preciso aplicar a la hora que se está leyendo. Por este motivo, muchos relojes de Sol tienen adjunta la gráfica de la ecuación de tiempo. La otra solución consiste en trazar varios conjuntos de líneas, para un conjunto de fechas distribuidas a lo largo del año. Un día cualquiera, se usa el cuadrante cuya fecha es más próxima a la del día de la observación. De esta forma, puede leerse la hora con un error de muy pocos minutos a lo largo de todo el año. Como ejemplo de diseño, las horas pueden indicarse mediante segmentos de recta. Para cada fecha, estos segmentos se dibujan a una distancia distinta del origen O . Hay sin embargo un inconveniente: en el verano, la altura del Sol es muy alta hacia mediodía, y por tanto la sombra proyectada por el gnomon es relativamente corta. Si su longitud es inferior al radio elegido para trazar las marcas horarias, la lectura puede ser difícil, al tener el observador que prolongar imaginariamente la línea de la sombra hasta alcanzar las líneas

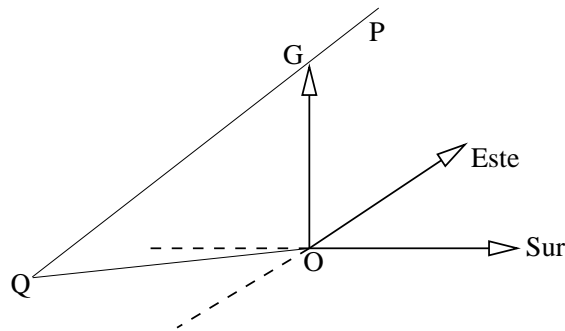


Figura 5.6

que marcan las horas. Por eso es común en muchos relojes de Sol que el gnomon no sea vertical, sino que tenga una cierta inclinación. Generalmente, el gnomon está contenido en el plano del meridiano local, y se haya inclinado hacia el Norte.

Hemos calculado los cuadrantes solares correspondientes al primer día de cada uno de los meses del año. La Figura (5.7) contiene las escalas para los meses de Enero a Junio, comenzando por el interior. La Figura (5.8) para los meses de Julio a Diciembre, comenzando por la escala exterior. Se supone que el cuadrante está situado en un plano horizontal, y que el estilo, vertical, se sitúa en el punto indicado mediante la cruz. El cálculo se ha realizado para el punto de coordenadas geográficas que hemos usado anteriormente como ilustrativo. La resolución de las escalas es de quince minutos, y para cada uno de los días en que se ha calculado se extiende desde un poco después del orto hasta un poco antes del ocaso.

Consideremos el caso general en que el estilo no es vertical, sino que, respecto al sistema de referencia horizontal, apunta en la dirección determinada por el acimut p y la altura q . Si tomamos como unidad la longitud del estilo, las coordenadas del extremo del mismo son

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \cos p \cos q \\ -\text{sen } p \cos q \\ \text{sen } q \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

No obstante, tiene sólo interés formal considerar el caso general, por lo que nos limitaremos a la situación habitual, en que el gnomon se encuentra en el plano $x - z$, en la dirección negativa del eje x y formando un ángulo q con la horizontal. En este caso

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} -\cos q \\ 0 \\ \text{sen } q \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Entonces, proyectamos \bar{P} sobre el plano horizontal según la dirección y sentido del vector unitario con origen en el Sol y situado sobre la línea que une a éste con el punto \bar{P} . De las coordenadas del punto proyectado obtenemos el acimut de la sombra del estilo a través de la función `atan()`, ubicándolo en el cuadrante correcto a partir del signo de las componente x e y de dicha proyección. Recordando la ecuación (3.12) y siguientes y particularizando:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} -\cos h \cos A \\ \cos h \text{sen } A \\ -\text{sen } h \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

tenemos que

$$r = -\frac{\bar{P}\hat{k}}{\hat{u}\hat{k}} = \frac{\text{sen } q}{\text{sen } h} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= -\cos q - r \cos h \cos A \\ \mu &= r \cos h \text{sen } A \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.4. Curvas de altura

En relación con la Figura (5.6), hemos representado dos curvas de altura para dos días distintos: el primero de enero y el primero de julio. En realidad, la Figura (5.9) representa la longitud de la sombra en unidades de la altura del gnomon, supuesto vertical. Un reloj portátil sencillo puede construirse de la siguiente forma: se imprimen (sobre papel u otro material adecuado), las curvas de altura para una selección de días. La tabla que contiene las curvas se sitúa horizontalmente, y se orienta de tal manera que la sombra del gnomon, vertical, móvil sobre el eje de abcisas, sea paralela al de ordenadas. Entonces, el gnomon se desplaza a lo largo del eje de abcisas hasta que el extremo de la sombra toque a la curva correspondiente al día en que se haga la observación. La posición del gnomon sobre el eje de abcisas marca directamente la hora.

Existen al menos dos variantes útiles en la representación de las curvas de altura. La primera da lugar al reloj de sol cilíndrico. Hemos dicho que cuando la altura del Sol es muy pequeña, la sombra que proyecta el gnomon es muy grande, y puede ser imposible de representar. Una solución consiste en situar el gnomon horizontalmente, y medir su sombra sobre la vertical que contiene al origen del estilo. Precisando: situamos el estilo horizontalmente, y lo orientamos en su plano de forma que el Sol, el propio estilo y la vertical que contiene su origen estén todos contenidos en el mismo plano. Entonces, en unidades de la longitud del gnomon, la longitud de la sombra es $\tan h$. Imaginemos que representamos la gráfica $\tan h$ versus la hora solar, y que fijamos esa gráfica sobre un cilindro. El estilo va unido a un anillo que se adapta a la parte superior del cilindro. Para efectuar una observación, el cilindro se sitúa con su eje en posición vertical (quizás suspendiéndolo de una cadenita), el anillo se gira para que el estilo apunte en dirección al Sol y a continuación el observador sujeta este anillo y gira el cilindro, hasta que la sombra toque a la curva de altura. La gráfica nos da directamente la hora.

La segunda aplicación de las curvas de altura tiene que ver con la brújula solar, de cuyo uso por parte de los vikingos se tienen evidencias arqueológicas. Imaginemos que representamos la altura del Sol en función de su acimut, es decir, la trayectoria de la sombra. Pero, en lugar de una representación cartesiana, hagamos una representación polar, donde la longitud de la sombra es la coordenada radial, y el acimut la coordenada angular. Imprimamos esta gráfica sobre un disco, en cuyo centro se yergue el gnomon. Situemos el disco en posición horizontal, y hagámoslo girar en torno al eje perpendicular a su plano y que contiene el estilo hasta que la sombra de éste toque a la curva. Entonces, como es fácil de entender, el radio de acimut 180^0 apunta directamente hacia el Sur.

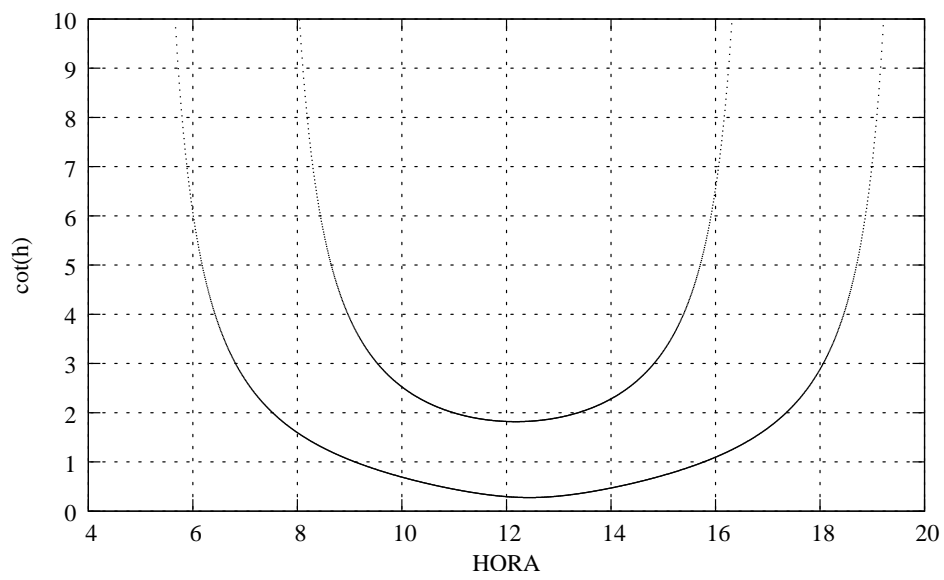


Figura 5.9

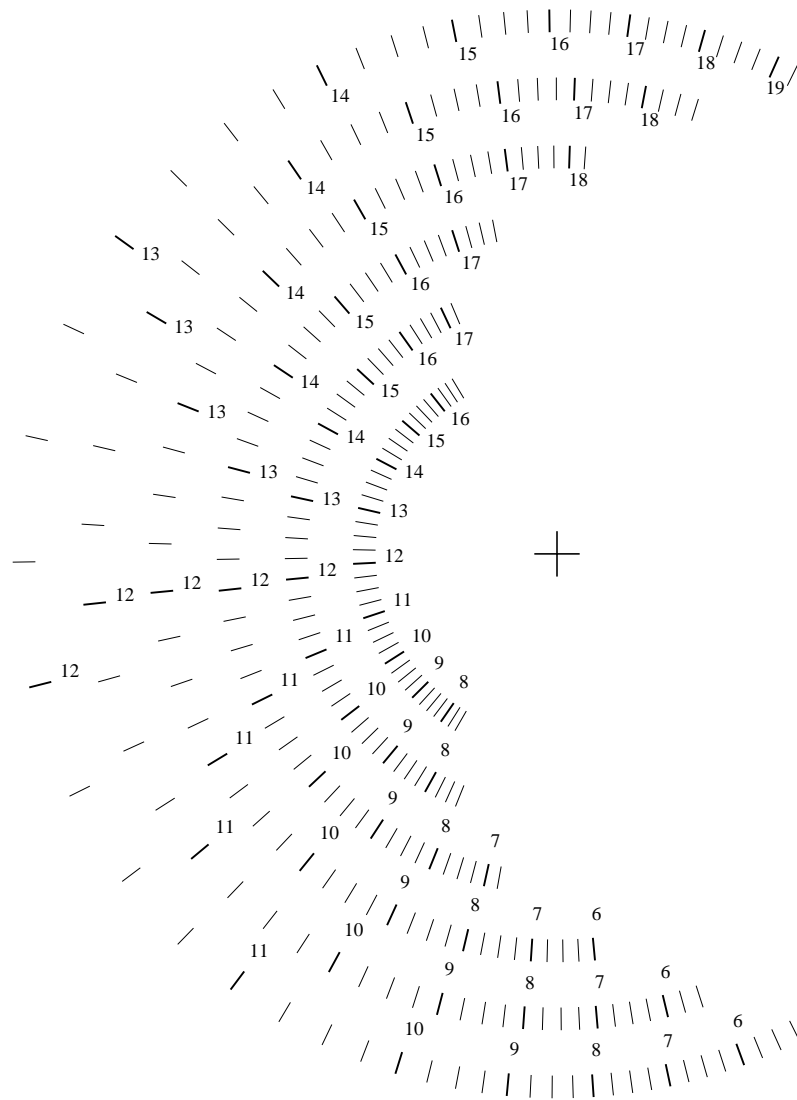


Figura 5.7

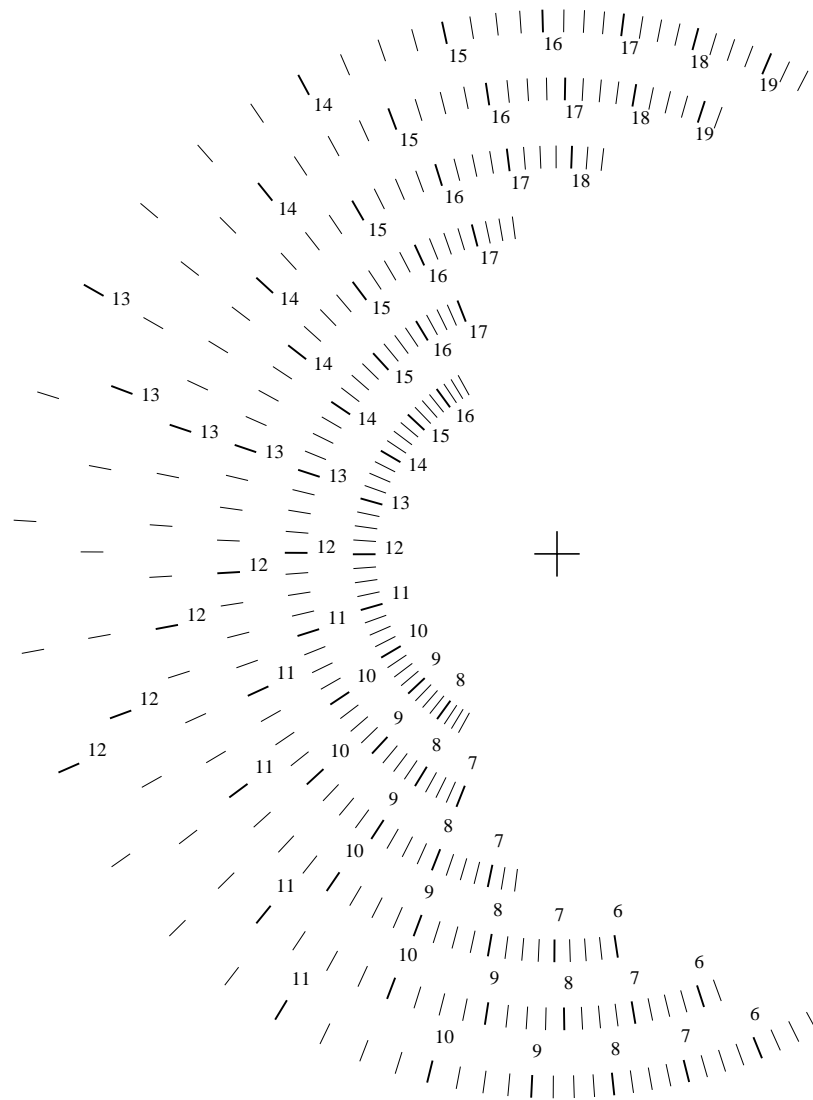


Figura 5.8

Capítulo 6

Relojes verticales y declinantes

6.1. El reloj vertical

Si bien los relojes horizontales son frecuentes en plazas y parques, son más numerosos los que se encuentran en las fachadas de muchos edificios públicos y privados, en las paredes de patios y en las torres, entre otros lugares. Consideraremos en primer lugar el reloj de pared más sencillo posible, que se da cuando la pared es perfectamente vertical y está orientada exactamente hacia el Sur, tal y como aparece en la Figura (6.1).

Hemos representado en la base de la pared el sistema de referencia horizontal, respecto al cual la dirección del Sol en un momento dado es $\bar{r}_{A,h}$. Obsérvese cómo del sistema horizontal pasamos al sistema de la fachada mediante un giro de 90^0 en sentido antihorario alrededor del eje y . Si llamamos \bar{r}_1 a las coordenadas del mismo punto en el sistema de la fachada, es claro que

$$\bar{r}_{A,h} = \mathbf{R}_{\hat{j},90^0} \bar{r}_1 \quad (6.1)$$

Supondremos por otro lado que el gnomon se fija al punto O' , está contenido en el plano (x', z') y forma un ángulo q con la vertical, de manera que las coordenadas en el sistema del muro de su extremo, supuesta su longitud la unidad, son

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \cos q \\ 0 \\ \sen q \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

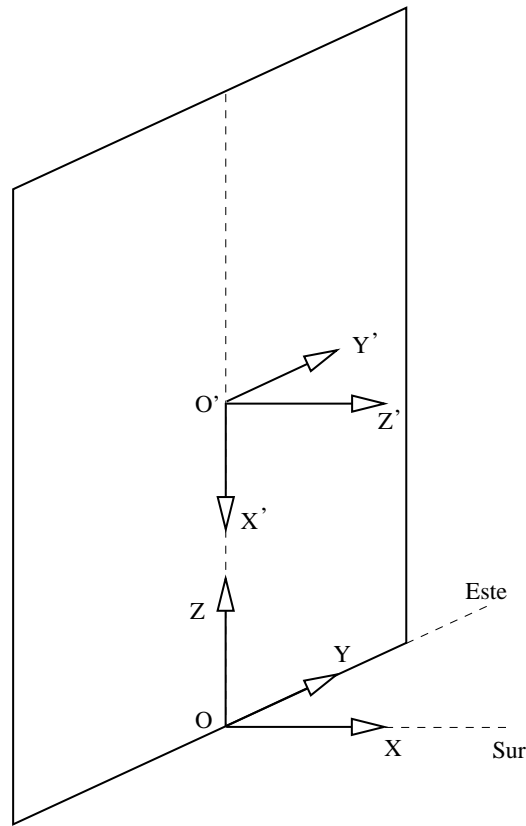


Figura 6.1

El problema por tanto se reduce a la proyección del punto \bar{P} según la dirección del Sol *en el sistema del muro* sobre éste. Es claro que

$$\hat{u} = -\bar{r}_1 = -\mathbf{R}_{j,90^\circ}^{-1} \bar{r}_{A,h} \quad (6.3)$$

Formalmente entonces el problema es idéntico al que ya fue resuelto en (3.12) y siguientes. Una vez obtenida la proyección del extremo del gnomon sobre la fachada, la línea que une el origen O' con este punto coincide con la sombra proyectada. Así pues, calcularemos para una serie de horas $\bar{r}_{A,h}$, obtendremos \bar{r}_1 y proyectaremos el extremo del gnomon sobre la fachada, trazando así para cada hora elegida la línea de la sombra. Obviamente, el cálculo tiene sentido sólo cuando el acimut del Sol se encuentra entre 270° y los 90° .

6.2. El reloj declinante, I

Imaginemos que la fachada no se encuentra orientada exactamente hacia el Sur, sino que la normal a la pared forma un ángulo σ , medido en sentido antihorario, con el Sur. En ese caso, podemos imaginar un proceso de dos pasos. Una vez conocido el vector $\bar{r}_{A,h}$ en el sistema horizontal, un giro de 90° en torno al eje y transforma el sistema horizontal en un sistema intermedio, que coincide con el que hemos denominado anteriormente el sistema de la fachada. Las coordenadas del Sol en los sistemas horizontal e intermedio se relacionan mediante

$$\bar{r}_{A,h} = \mathbf{R}_{\hat{j},90^\circ} \bar{r}_1 \quad (6.4)$$

En un segundo paso, giramos el sistema intermedio en torno a su eje x y en sentido antihorario un ángulo σ para transformar al sistema intermedio en el nuevo sistema de la fachada:

$$\bar{r}_1 = \mathbf{R}_{\hat{i},\sigma} \bar{r}_2 \quad (6.5)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores:

$$\bar{r}_{A,h} = \mathbf{R}_{\hat{j},90^\circ} \mathbf{R}_{\hat{i},\sigma} \bar{r}_2 \quad (6.6)$$

En el sistema de la fachada, las coordenadas del extremo del gnomon, punto que hemos llamado \bar{P} , siguen siendo las mismas, y el problema sigue consistiendo en la proyección de este punto sobre la fachada. La única diferencia es que ahora

$$\hat{u} = -\bar{r}_2 = -[\mathbf{R}_{\hat{j},90^\circ} \mathbf{R}_{\hat{i},\sigma}]^{-1} \bar{r}_{A,h} \quad (6.7)$$

6.3. El reloj declinante, II

Es poco frecuente que una pared no sea vertical, pero sí lo es encontrar relojes en jardines o parques que en lugar de trazarse sobre un plano horizontal se han dibujado sobre un plano inclinado. También existen, aunque son menos frecuentes, los relojes múltiples que se dibujan sobre las caras de diversas figuras poliédricas. En cualquier caso, falta exponer la geometría del cuadrante solar cuando ha de trazarse sobre un plano orientado arbitrariamente. Si volvemos a la sección anterior, vemos que la inclinación de la pared consiste en general en un giro antihorario de ángulo ν alrededor del eje y . Si

al sistema de referencia final, cuyo plano (x, y) se encuentra sobre la pared y cuyo eje z es perpendicular a la misma, lo denominamos \bar{r}_3 , es claro que

$$\bar{r}_2 = \mathbf{R}_{\hat{j}, \nu} \bar{r}_3 \quad (6.8)$$

De manera que podemos enlazar las coordenadas horizontales del Sol con sus coordenadas medidas en un sistema de referencia sobre una superficie cualquiera, cuya orientación vendrá dada por los ángulos σ y ν :

$$\bar{r}_3 = [\mathbf{R}_{\hat{j}, 90^\circ} \mathbf{R}_{\hat{i}, \sigma} \mathbf{R}_{\hat{j}, \nu}]^{-1} \bar{r}_{A,h} = \mathbf{S}_{\sigma, \nu}^{-1} \bar{r}_{A,h} \quad (6.9)$$

6.4. Determinación experimental de la orientación de la pared

6.4.1. Un método teórico

Es un problema práctico central en nuestra discusión el de conocer con la mayor exactitud posible la orientación de la superficie sobre la que se trazará el cuadrante solar. Existen muchos métodos para encontrar los ángulos (σ, ν) , pero por consistencia nosotros expondremos un método experimental basado en la observación del Sol. Fijaremos un gnomon perpendicularmente a la superficie cuya orientación deseamos averiguar, tomaremos como eje x uno que coincida con la línea de máxima pendiente sobre la superficie, como eje z la perpendicular a la misma y orientaremos el eje y de forma que complete un triedro directo, es decir, de forma que sea $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$. La idea es registrar para una serie de instantes de tiempo las coordenadas (x, y) de la sombra del extremo del gnomon, y a partir de ahí deducir la pareja (σ, ν) . Sin pérdida de generalidad, supondremos que el gnomon tiene longitud unitaria, de forma que su extremo es el punto

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Si indicamos con el subíndice n un instante particular, tenemos que

$$\bar{r}_{3,n} = \mathbf{S}_{\sigma, \nu}^{-1} \bar{r}_{A(n), h(n)} \quad (6.11)$$

Calculamos en primer lugar

$$\mathbf{S}_{\sigma,\nu} = \mathbf{R}_{\hat{j},90^\circ} \mathbf{R}_{\hat{i},\sigma} \mathbf{R}_{\hat{j},\nu} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \nu \cos \sigma & \operatorname{sen} \sigma & \cos \nu \cos \sigma \\ \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \sigma & \cos \sigma & -\cos \nu \operatorname{sen} \sigma \\ -\cos \nu & 0 & -\operatorname{sen} \nu \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Para aligerar la notación, llamaremos simplemente $\bar{r}_n = \bar{r}_{A(n),h(n)}$, y $\bar{r}_{3,n} = \mathbf{S}_{\sigma,\nu}^{-1} \bar{r}_n$. Proyectamos ahora el punto \bar{P} según la dirección $\hat{u} = -\bar{r}_{3,n} = -\mathbf{S}_{\sigma,\nu}^{-1} \bar{r}_n$. En relación con la ecuación (3.12) y siguientes, llamaremos

$$\begin{aligned} r_n &= -\frac{\bar{P} \cdot \hat{k}}{\hat{u}_n \cdot \hat{k}} \\ \lambda_n &= \bar{P} \cdot \hat{i} + r_n \hat{u}_n \cdot \hat{i} \\ \mu_n &= \bar{P} \cdot \hat{j} + r_n \hat{u}_n \cdot \hat{j} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{u}_n \cdot \hat{i} &= \operatorname{sen} \nu \cos \sigma (\bar{r}_n \cdot \hat{i}) - \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \sigma (\bar{r}_n \cdot \hat{j}) + \cos \nu (\bar{r}_n \cdot \hat{k}) \\ \hat{u}_n \cdot \hat{j} &= -\operatorname{sen} \sigma (\bar{r}_n \cdot \hat{i}) - \cos \sigma (\bar{r}_n \cdot \hat{j}) \\ \hat{u}_n \cdot \hat{k} &= -\cos \nu \cos \sigma (\bar{r}_n \cdot \hat{i}) + \cos \nu \operatorname{sen} \sigma (\bar{r}_n \cdot \hat{j}) + \operatorname{sen} \nu (\bar{r}_n \cdot \hat{k}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Como por otra parte

$$\begin{aligned} \bar{P} \cdot \hat{i} &= 0 \\ \bar{P} \cdot \hat{j} &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

introduciendo por brevedad la notación $n_x = \bar{r}_n \cdot \hat{x}$ y combinando las ecuaciones anteriores, llegamos a

$$\begin{aligned} & -n_i \lambda_n \cos \nu \cos \sigma + n_j \lambda_n \cos \nu \operatorname{sen} \sigma + n_k \operatorname{sen} \nu \\ = & n_i \operatorname{sen} \nu \cos \sigma - n_j \operatorname{sen} \nu \operatorname{sen} \sigma + n_k \cos \nu \\ & -n_i \mu_n \cos \nu \cos \sigma + n_j \mu_n \cos \nu \operatorname{sen} \sigma + n_k \mu_n \operatorname{sen} \nu \\ = & -n_i \operatorname{sen} \sigma - n_j \cos \sigma \end{aligned} \quad (6.16)$$

El sistema anterior es homogéneo, y los coeficientes (λ_n, μ_n) vienen afectados por un cierto error, puesto que la sombra \bar{P} no está perfectamente definida (lo estaría únicamente en el caso de que el diámetro aparente del Sol fuese despreciable). Lo mejor entonces es reunir un número suficiente de observaciones y efectuar un ajuste mediante mínimos cuadrados.

6.4.2. Un método práctico

En la mayoría de las ocasiones, el reloj se instalará sobre un plano vertical, y entonces sólo es preciso conocer el ángulo σ . A tal efecto, colocaremos una varilla perpendicularmente a la pared y mediremos el ángulo que forma su sombra con la vertical, determinada por una plomada. Anotaremos la hora. Con estos dos datos entonces es posible determinar la orientación de la pared. Si es posible, una forma más sencilla aún consiste en anotar la hora a la que la sombra de la varilla coincide con la vertical por el punto en que se apoya en la pared. La orientación de la pared coincide entonces con el acimut del Sol para esa hora. Este es el método más sencillo posible, pero puesto que la espera puede resultar tediosa, desarrollaremos el método más general descrito en primer lugar.

En primer lugar y en relación con la ecuación (6.7) tenemos que

$$\left[\mathbf{R}_{\hat{j}, 90^\circ} \mathbf{R}_{\hat{i}, \sigma} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \text{sen } \sigma & \text{cos } \sigma & 0 \\ \text{cos } \sigma & -\text{sen } \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

y particularizando (3.12) y siguientes tenemos que

$$\begin{aligned} r &= 1/f \\ \lambda &= \frac{1}{f} \text{sen } h \\ \mu &= \frac{1}{f} (-\text{sen } \sigma \text{cos } h \text{cos } A + \text{cos } \sigma \text{cos } h \text{sen } A) \end{aligned} \quad (6.18)$$

con

$$f = \text{cos } \sigma \text{cos } h \text{cos } A - \text{sen } \sigma \text{cos } h \text{sen } A \quad (6.19)$$

Aligeremos la notación escribiendo $c_1 = \cos h \cos A$ y $c_2 = \cos h \sin A$ y tenemos el sistema

$$\begin{aligned}\lambda c_1 \cos \sigma - \lambda c_2 \sin \sigma &= \sin h \\ (\mu c_1 - c_2) \cos \sigma - (\mu c_2 - c_1) \sin \sigma &= 0\end{aligned}\tag{6.20}$$

De la segunda

$$\sin \sigma = \frac{\mu c_1 - c_2}{\mu c_2 - c_1} \cos \sigma\tag{6.21}$$

y sustituyendo en la primera

$$\cos \sigma = \frac{\mu c_2 - c_1}{\lambda(c_1^2 - c_2^2)} \sin h\tag{6.22}$$

Como caso particular, veamos que cuando $\sigma = 0$ y $A = 0$ ha de ser $\mu = 0$ y entonces $\lambda = \tan h$, ecuación a la que en efecto se reduce la anterior en estas condiciones.