Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica
e Informática Industrial

Universidad Politécnica de Madrid

Detección de Esquinas y Vértices

José María Sebastián

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los "puntos de interés"
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el "Scale-Space"
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

VISIÓN POR COMPUTADOR

Introducción

- ***Detección de características ("features")***
  - Bordes
  - Esquinas
  - Vértices

- ***Tipos de esquinas presentes en la imagen***
  - Geométricas
  - Texturadas
  - Proyección de un vértice

Introducción

- ***Características de cualquier detector de esquinas y vértices***
  - Todas las esquinas y vértices se deben de detectar
  - No se deben de detectar falsas esquinas o vértices
  - Debe de ser robusto frente al ruido
  - La localización debe de ser precisa
  - La detección debe de ser eficiente
- ***Los algoritmos presentan excesivas dependencias de las características de las imágenes***

VISIÓN POR COMPUTADOR

Introducción

- ***Imágenes de partida***
  - Binivel (etiquetadas como borde)
  - Multinivel
- ***Características a detectar***
  - Sólo esquinas
  - Sólo vértices
  - Indistintamente vértices y esquinas
- ***Definición de las esquinas***
  - Con modelo (ángulo, amplitud, suavizado)
  - Sin modelo

Introducción

- ***Enfoques distintos en la detección de esquinas y vértices***
  - Se pretende detectar si existen
  - Hay que localizarlos con precisión (subpixel)
- ***Los detectores de esquinas y vértices son más sensibles al difuminado de la imagen que los de bordes***
  - Especialmente en la localización con precisión
  - Motivos del difuminado
    - Desenfoque, deficiente iluminación
    - Función de extensión puntual (PSF), deficiencias de los sensores, ...
    - Tratamiento de suavizado: reducción de ruido, ...

Introducción

- ***Formas de evaluar la precisión en la detección***
  - Mediante estudios estadísticos: no tiene en cuenta los errores sistematicos
  - Formas alternativas
    - Mediante posicionado exigente
    - Con puntos alineados
      - Invariante ante la transformación de perspectiva
      - Modelo de cámara sin distorsión
    - Comparación entre puntos 3D y 2D
    - Cumplimiento de la geometría epipolar
    - Razón doble ("cross-ratio") de cuatro puntos alineados
      - Invariante ante la transformación de perspectiva
      - Modelo de cámara sin distorsión

VISIÓN POR COMPUTADOR

Introducción

- ***Áreas de interés de la detección de esquinas y vértices***
  - Aplicaciones 2D:
    - Medida
    - Reconocimiento
  - Aplicaciones 3D:
    - Calibración Euclídea y Proyectiva
    - Correspondencia
    - Reconstrucción 3D
    - Flujo Óptico
    - Reconocimiento

VISIÓN POR COMPUTADOR

Introducción

- ***Muchos detectores de bordes se basan en operadores derivadas***
- ***Formas de detección:***
  - Umbralización de la primera derivada
  - Centro de gravedad de la primera derivada
  - Máximo de la primera derivada
  - Paso por cero de la segunda derivada

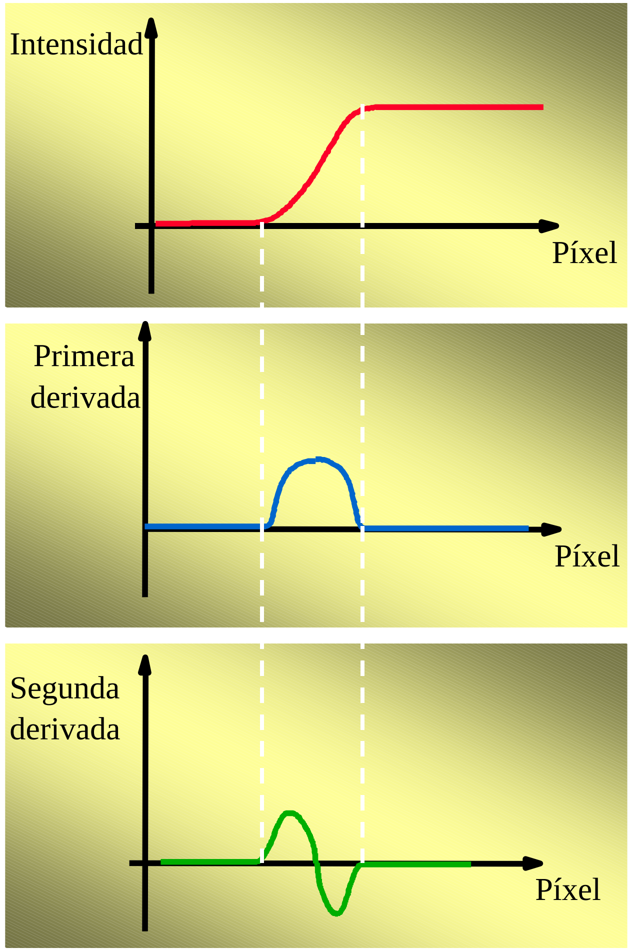


Imagen lineal

Introducción

- ***Robustez ante el ruido***
  - Mejor comportamiento de los operadores basados en la primera derivada
- ***Imágenes bidimensionales***
  - Particularidades que se analizarán en la presentación

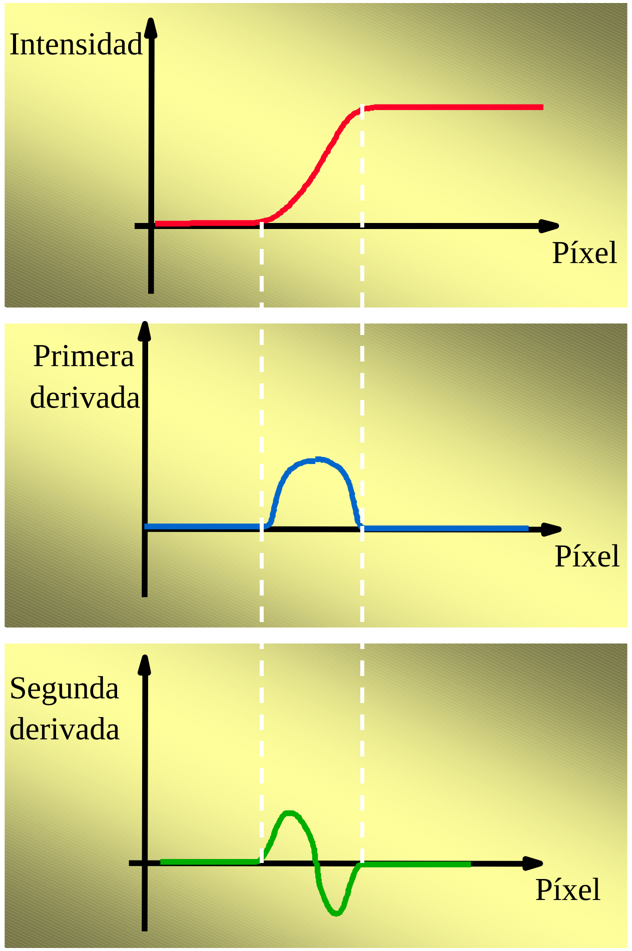
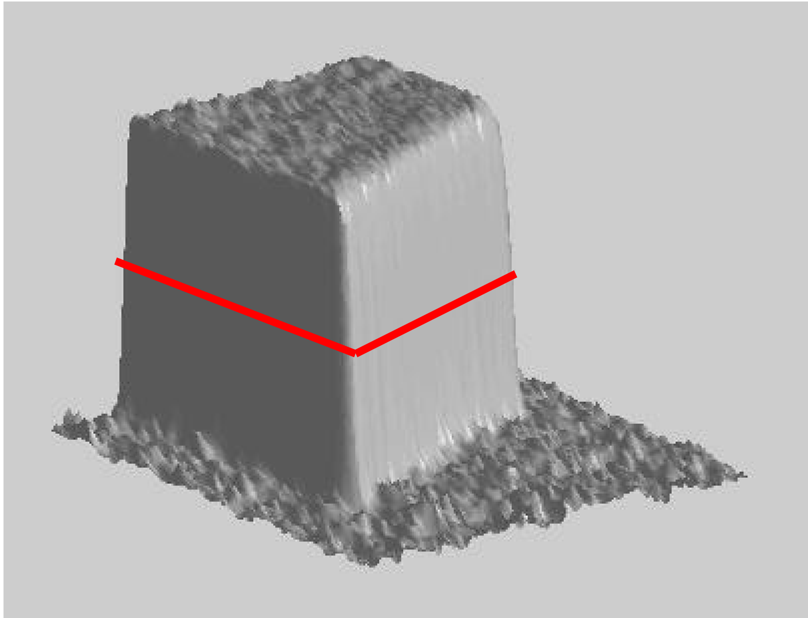


Imagen lineal

Introducción

Imagen en niveles de gris



Superficie 3D de la imagen, girado el punto de vista

Posición del borde

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

Definiciones

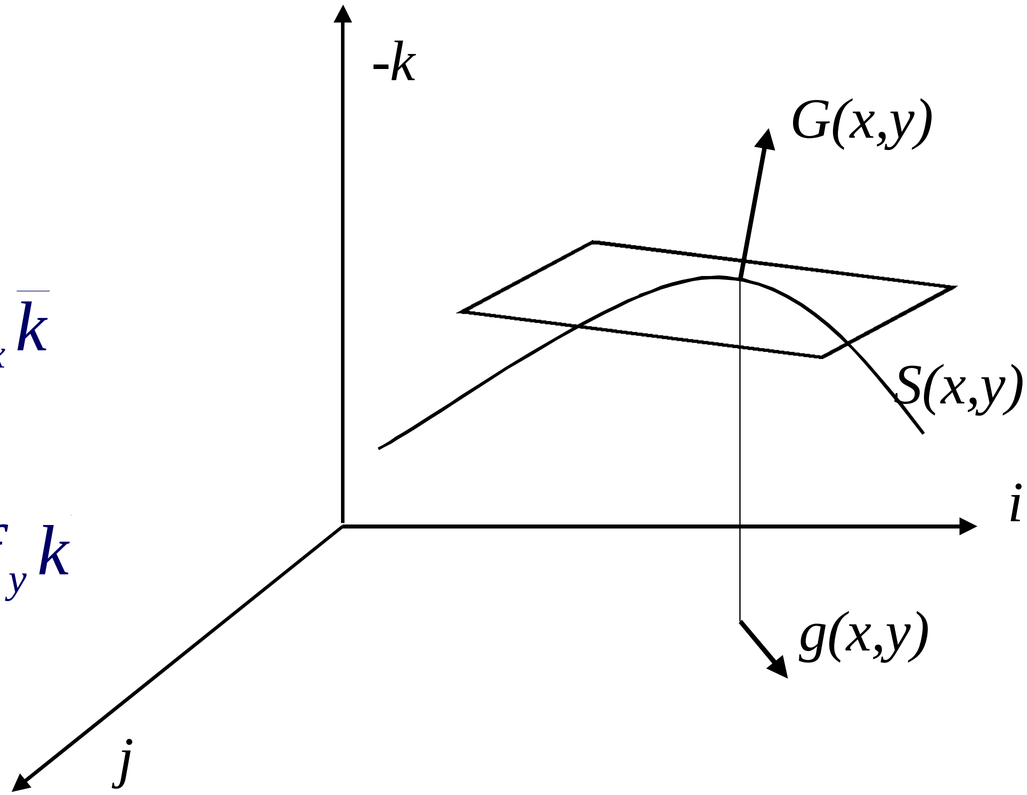
Superficie asociada a una imagen

$$f(x,y) \Rightarrow S(x,y) = xi + yj + f(x,y)k$$

Plano tangente

$$\overline{S_x} = \frac{\partial S(x,y)}{\partial x} = \overline{i} + f_x \overline{k}$$

$$S_y = \frac{\partial S(x,y)}{\partial y} = j + f_y k$$



VISIÓN POR COMPUTADOR

Definiciones

Superficie asociada a una imagen

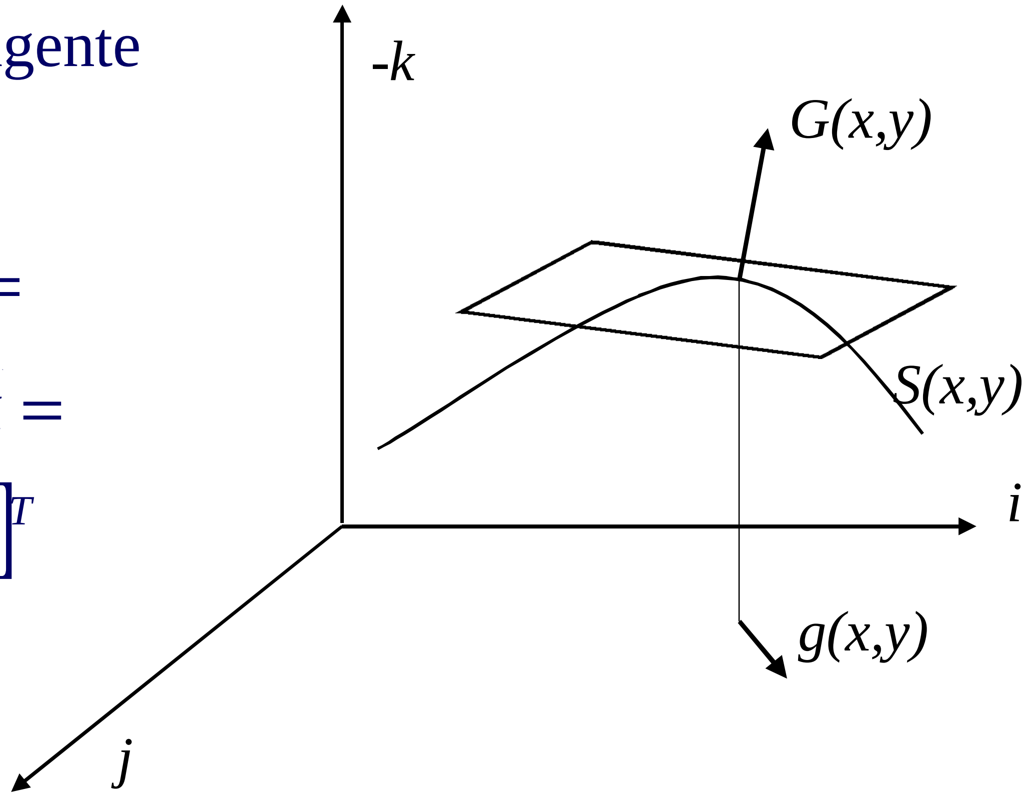
$$f(x,y) \Rightarrow S(x,y) = xi + yj + f(x,y)k$$

Normal al plano tangente en el punto *(x,y)*

$$G(x,y) = S_y \wedge S_x =$$

$$= f_x i + f_y j - k =$$

$$= \begin{bmatrix} f_x & f_y & -1 \end{bmatrix}^T$$



VISIÓN POR COMPUTADOR

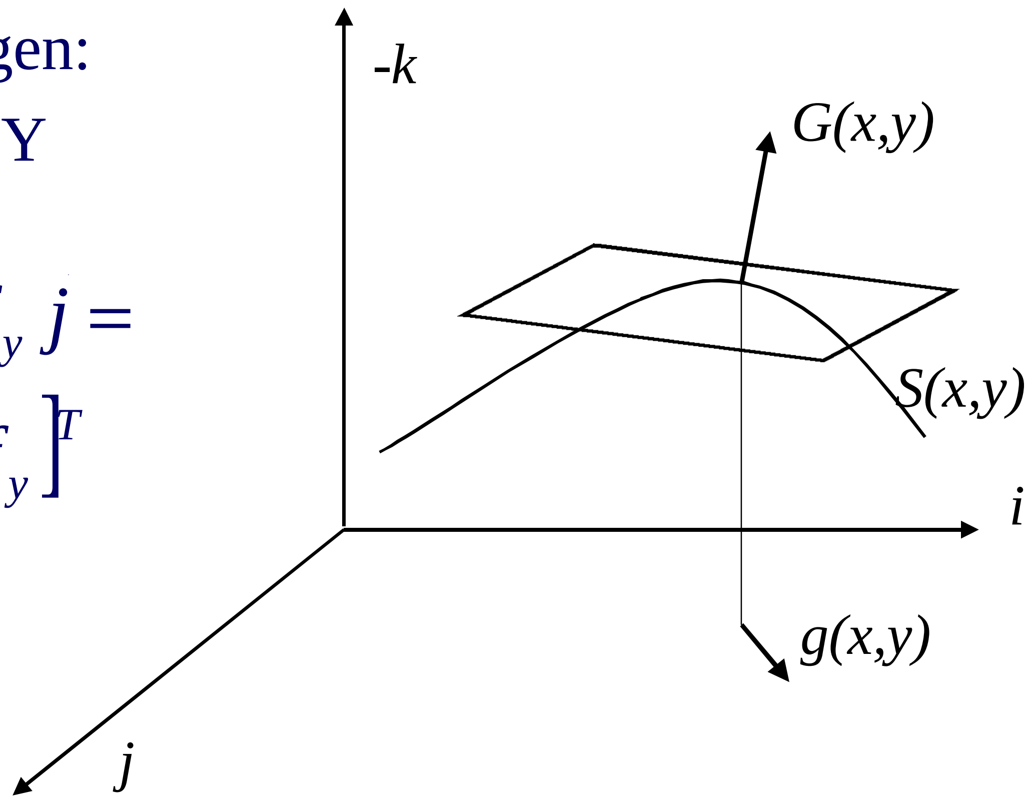
Definiciones

Superficie asociada a una imagen

$$f(x,y) \Rightarrow S(x,y) = xi + yj + f(x,y)k$$

Gradiente de la imagen:
proyección sobre X-Y

$$g(x,y) = f_x i + f_y j =$$
$$= \nabla f = [f_x \quad f_y]^T$$



Definiciones

- ***Primera derivada en una dirección*** q

$$D_q f = \overline{\nabla f}^T \cdot \overline{u_q} = \overline{g}^T \cdot \overline{u_q} = f_x u_{1q} + f_y u_{2q}$$

- ***Primera derivada en la dirección del gradiente***

$$D_g f = \nabla f^T \cdot g = g^T \cdot g = f_x^2 + f_y^2$$

- ***Segunda derivada en una dirección*** q

$$D_q^2 f = u_q^{\mathrm{T}} \cdot H_f \cdot u_q \quad \text{con} \quad H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

VISIÓN POR COMPUTADOR

Definiciones

- **Segunda derivada en la dirección del gradiente**

$$D_g^2 f = g^T \cdot H_f \cdot g = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} =$$

$$= f_{xx} f_x^2 + 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_y^2$$

- **Segunda derivada en la dirección perpendicular al gradiente**

$$g_\perp = \begin{bmatrix} -f_y & f_x \end{bmatrix}^T \qquad D_{g_\perp}^2 f = g_\perp^T \cdot H_f \cdot g_\perp =$$

$$= \begin{bmatrix} -f_y & f_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -f_y \\ f_x \end{bmatrix} = f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2$$

VISIÓN POR COMPUTADOR

Definiciones

- La suma de ambas segundas derivadas es:

$$D_g{}^2 f + D_{g_\perp}{}^2 f = f_{xx} f_x{}^2 + 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_y{}^2 +$$
$$+ f_{xx} f_y{}^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x{}^2 = \left(f_{xx} + f_{yy}\right)\left(f_x{}^2 + f_y{}^2\right)$$

- Laplaciana de una función: $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy}$

- Se cumple: $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} = \dfrac{D_g{}^2 f + D_{g_\perp}{}^2 f}{f_x{}^2 + f_y{}^2}$

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

Curvatura de una Superficie

Superficie asociada a una imagen $S(x,y) = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x,y)\bar{k}$

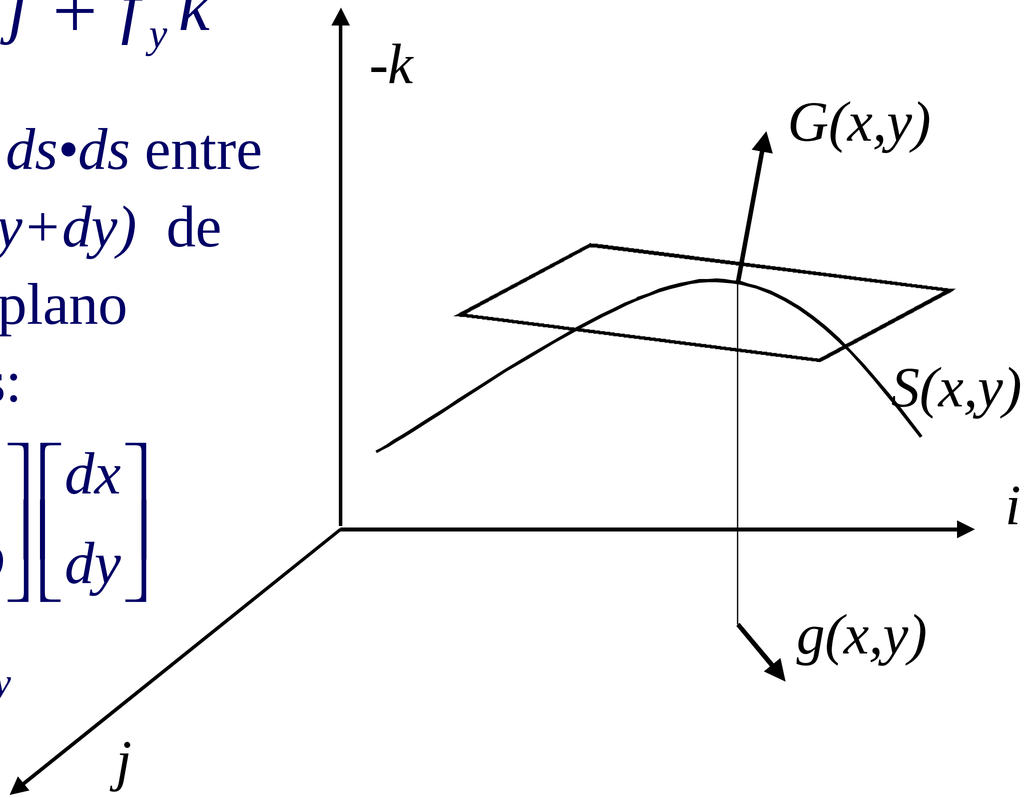
Plano tangente
$$\overline{S}_x = \bar{i} + f_x\bar{k}$$
$$\overline{S}_y = \bar{j} + f_y\bar{k}$$

La distancia infinitesimal *ds•ds* entre dos puntos *(x,y)* y *(x+dx,y+dy)* de la superficie medida en el plano tangente en dicho punto es:

$$ds^T \cdot ds = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$E = S_x S_x \quad ; \quad F = S_x S_y$$

$$D = S_y S_y$$



Curvatura de una Superficie

Plano tangente $\overline{S}_x = \overline{i} + f_x \overline{k}$ $\overline{S}_y = \overline{j} + f_y \overline{k}$

La distancia infinitesimal $ds^T \cdot ds = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

$$E = S_x S_x \quad ; \quad F = S_x S_y \quad ; \quad D = S_y S_y$$

Primera Fórmula Fundamental de la superficie *S(x,y)*

$$f_1 = E\,dx^2 + 2F\,dxdy + D\,dy^2$$

Para la imagen $E = S_x S_x = 1 + f_x^{\,2} \quad ; \quad F = S_x S_y = f_x f_y$

$$D = S_y S_y = 1 + f_y^{\,2}$$

$$f_1 = \left(1 + f_x^{\,2}\right) dx^2 + 2 f_x f_y\, dxdy + \left(1 + f_y^{\,2}\right) dy^2$$

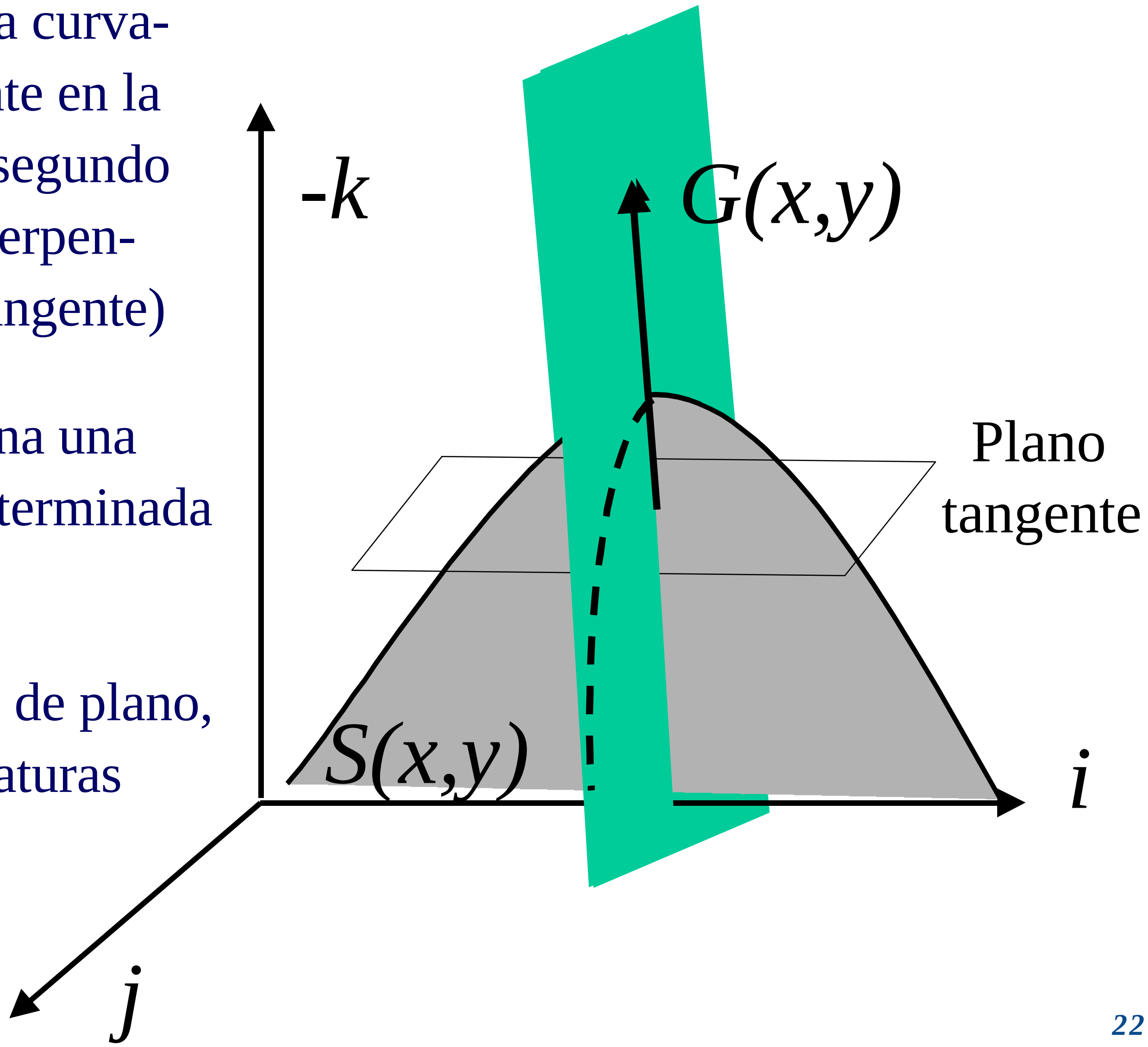
VISIÓN POR COMPUTADOR

Curvatura de una Superficie

•Información de la curvatura: la componente en la aproximación de segundo orden (un plano perpendicular al plano tangente)

•Cada plano origina una curva, con una determinada curvatura

•Se genera un haz de plano, con infinitas curvaturas



Curvatura de una Superficie

Información de la curvatura: la componente en la aproximación de segundo orden (un plano perpendicular al plano tangente)

$$ds^T \cdot d\hat{G} = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \qquad \text{con} \qquad \hat{G} = \frac{G}{\|G\|}$$

$$L = -\hat{G}\, S_{xx} \quad ; \quad M = -\hat{G}\, S_{xy} \quad ; \quad N = -\hat{G}\, S_{yy}$$

Para la imagen

$$\hat{G} = \frac{G}{\|G\|} = \frac{f_x i + f_y j - k}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

$$\overline{S_{xx}} = f_{xx} \overline{k} \quad ; \quad \overline{S_{xy}} = f_{xy} \overline{k} \quad ; \quad \overline{S_{yy}} = f_{yy} \overline{k}$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad ; \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \quad ; \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

Curvatura de una Superficie

Información de la curvatura: la componente en la aproximación de segundo orden (un plano perpendicular al plano tangente)

$$ds^T \cdot d\hat{G} = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Segunda Fórmula Fundamental de la superficie *S(x,y)*

$$\mathrm{f}_2 = L\,dx^2 + 2M\,dxdy + N\,dy^2$$

Cada plano perpendicular al plano tangente tiene asociada una curva (intersección con la superficie) con una curvatura

$$k = \frac{L\,dx^2 + 2M\,dxdy + N\,dy^2}{E\,dx^2 + 2F\,dxdy + D\,dy^2}$$

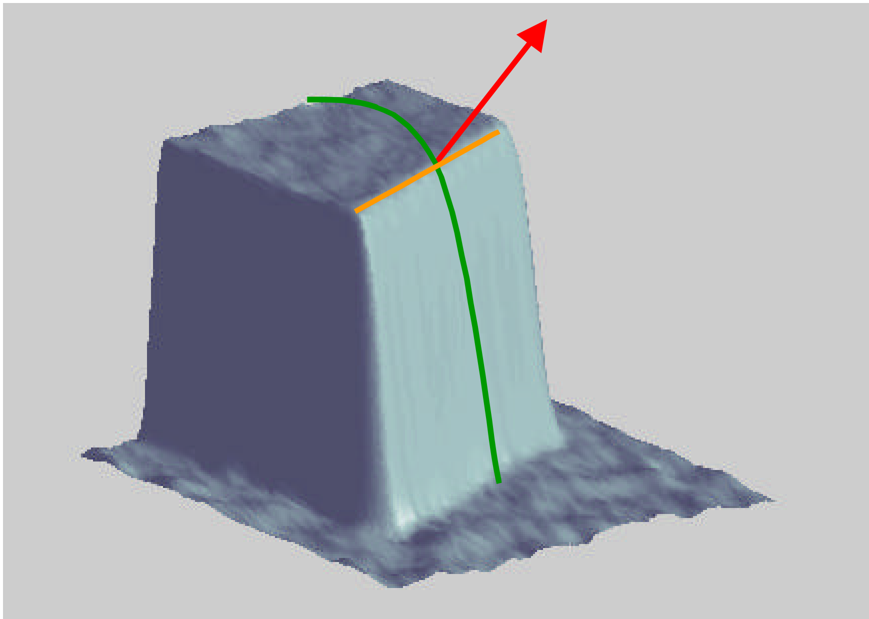
Depende pues de (dx, dy)

Curvatura de una Superficie

Imagen inicial

Imagen filtrada

Superficie 3D de la imagen, girado el punto de vista



VISIÓN POR COMPUTADOR

Curvatura de una Superficie

$$k = \frac{L\,dx^2 + 2M\,dxdy + N\,dy^2}{E\,dx^2 + 2F\,dxdy + D\,dy^2}$$

Los valores máximos y mínimos cumplirán $\frac{\partial k}{\partial (dx)} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial k}{\partial (dy)} = 0$

Se obtiene $k^2 - 2H\,k + K = 0$

K es la *Curvatura Gaussiana* $K = \frac{LN - M^2}{ED - F^2} = k_{\max} k_{\min}$

H es la *Curvatura Media* $H = \frac{EN + DL - 2FM}{2\left(ED - F^2\right)} = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2}$

Curvaturas Principales $k_{\min} = H - \sqrt{H^2 - K} \quad ; \quad k_{\max} = H + \sqrt{H^2 - K}$

Curvatura de una Superficie

$$k = \frac{L\,dx^2 + 2M\,dxdy + N\,dy^2}{E\,dx^2 + 2F\,dxdy + D\,dy^2}$$

K es la *Curvatura Gaussiana* $\quad K = k_{\max} k_{\min}$

H es la *Curvatura Media* $\quad H = \dfrac{k_{\max} + k_{\min}}{2}$

Curvaturas Principales $\quad k_{\min} = H - \sqrt{H^2 - K} \quad ; \quad k_{\max} = H + \sqrt{H^2 - K}$

Direcciones Principales

$$(-L + E\,k)dx + (-M + F\,k)dy = 0$$

$$(-M + F\,k)dx + (-N + D\,k)dy = 0$$

Curvatura de una Superficie

Para la superficie Imagen

$$H = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2} = \frac{\left(1 + f_x^{\,2}\right) f_{yy} + \left(1 + f_y^{\,2}\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy}}{\left(1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}\right)^{3/2}}$$

$$K = k_{\max} k_{\min} = \frac{LN - M^2}{ED - F^2} = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^{\,2}}{\left(1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}\right)^2}$$

Si $k_{\max} k_{\min} > 0 \iff$ El pixel es un punto elíptico

Si $k_{\max} k_{\min} < 0 \iff$ El pixel es un punto hiperbólico

Si $k_{\max} k_{\min} = 0 \iff$ El pixel es un punto parabólico

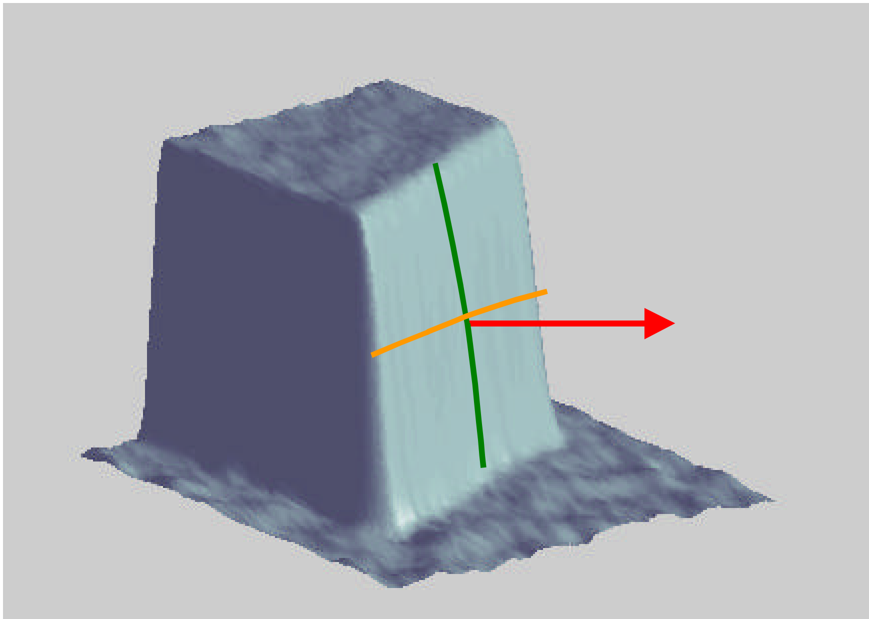
VISIÓN POR COMPUTADOR

Curvatura de una Superficie

Imagen inicial

Imagen filtrada

Superficie 3D de la imagen, girado el punto de vista



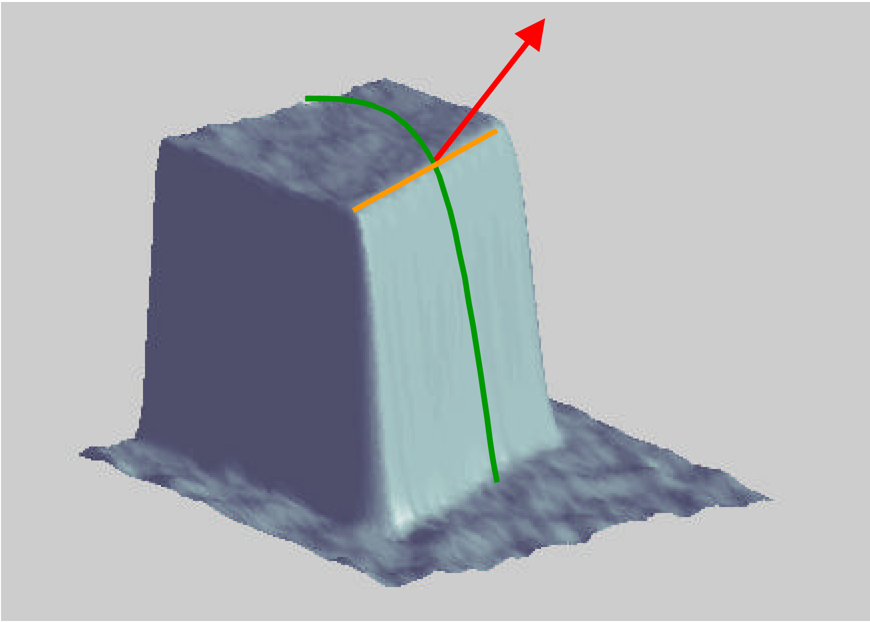
VISIÓN POR COMPUTADOR

Curvatura de una Superficie

Imagen inicial

Imagen filtrada

Superficie 3D de la imagen, girado el punto de vista



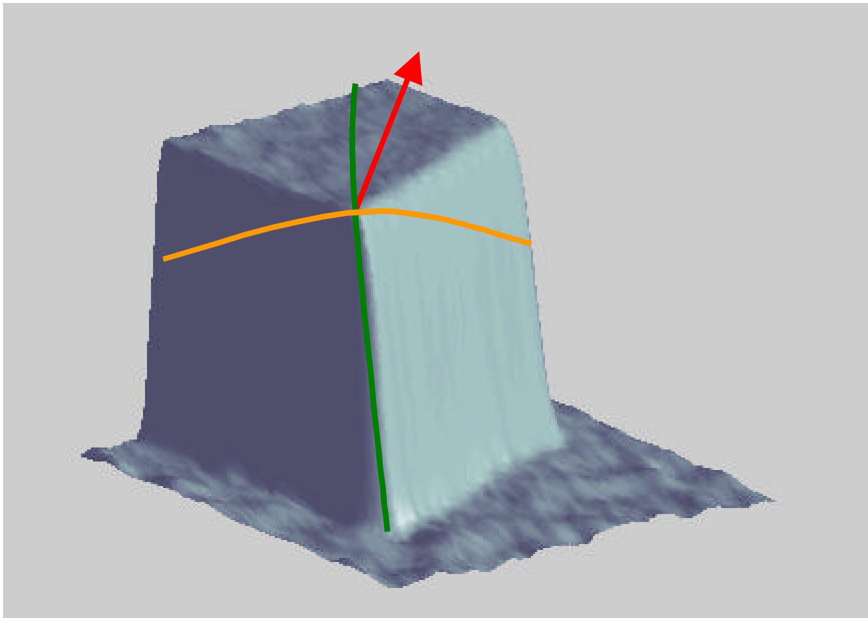
VISIÓN POR COMPUTADOR

Curvatura de una Superficie

Imagen inicial

Imagen filtrada

Superficie 3D de la imagen, girado el punto de vista

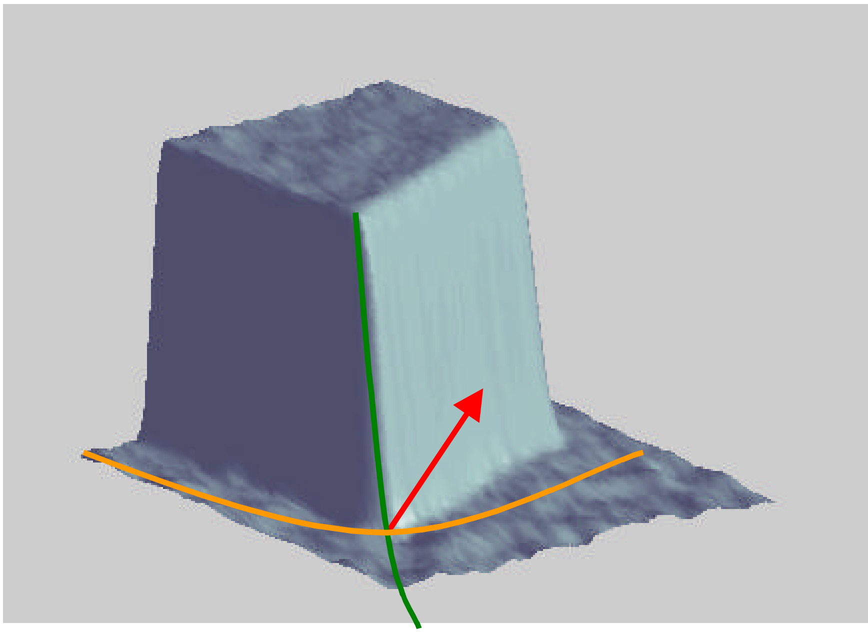


Curvatura de una Superficie

Imagen inicial

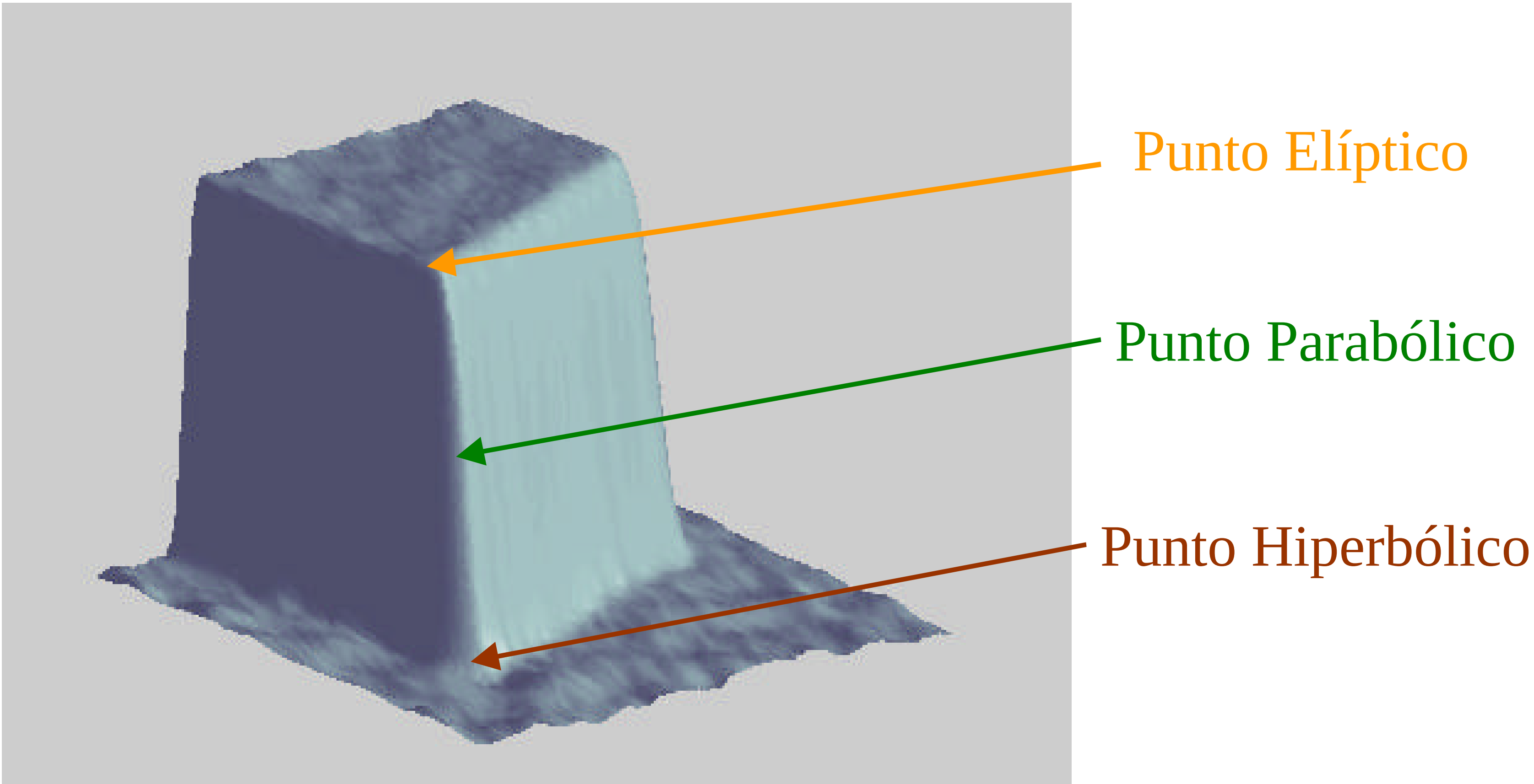
Imagen filtrada

Superficie 3D de la imagen, girado el punto de vista



VISIÓN POR COMPUTADOR

Curvatura de una Superficie



- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} \qquad D_g{}^2 f = f_{xx} f_x{}^2 + 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_y{}^2$$

Laplaciana

- Los bordes se detectan en el paso por cero
- Es isotrópico y lineal
- No define ninguna dirección sobre la imagen

Segunda derivada en la dirección del gradiente

- Los bordes se detectan en el paso por cero, que equivale al máximo local del gradiente en la dirección del gradiente (SNM)
- Define una dirección sobre la imagen

Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente

$$\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} \qquad D_g^{\,2} f = f_{xx} f_x^{\,2} + 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_y^{\,2}$$

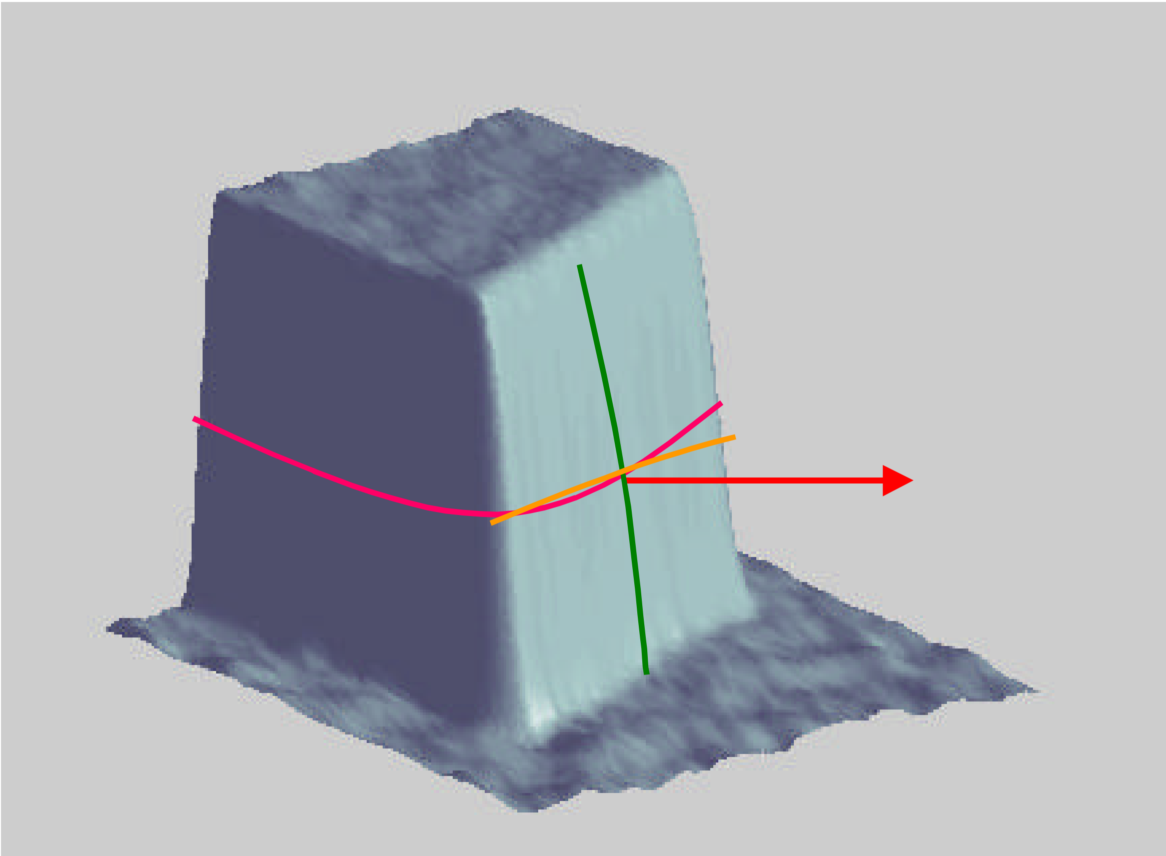
$$\text{Curvatura Media} \quad H = \frac{\left(1+f_x^{\,2}\right) f_{yy} + \left(1+f_y^{\,2}\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy}}{\left(1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}\right)^{3/2}}$$

$$\text{Se obtiene :}$$

$$2\left(1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}\right)^{3/2} H = \left(1+f_x^{\,2}+f_y^{\,2}\right)\nabla^2 f - D_g^{\,2} f$$

- Si la curvatura media es pequeña, los ceros de ambas funciones coinciden

Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente

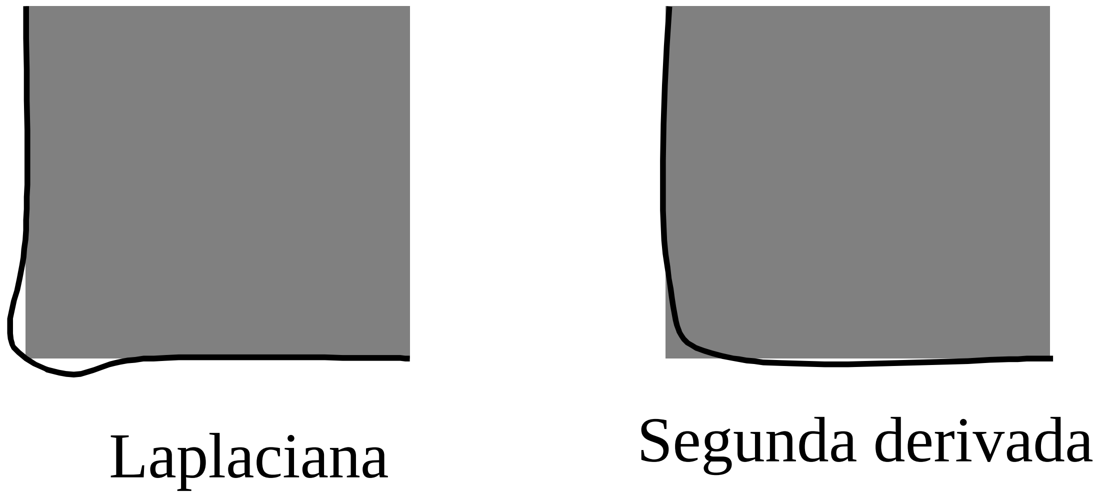


Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente

- *Los puntos del borde (salvo las esquinas) tienen una curvatura media muy pequeña, por lo que los ceros de ambas funciones casi coinciden*
- *La segunda derivada en la dirección del gradiente define una dirección por lo que facilita su detección con precisión subpixel*

Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente

- *Comportamiento en las esquinas*



- *La laplaciana se anula en la esquina*
- *En la dirección del gradiente, la distancia depende del ángulo y del difuminado*

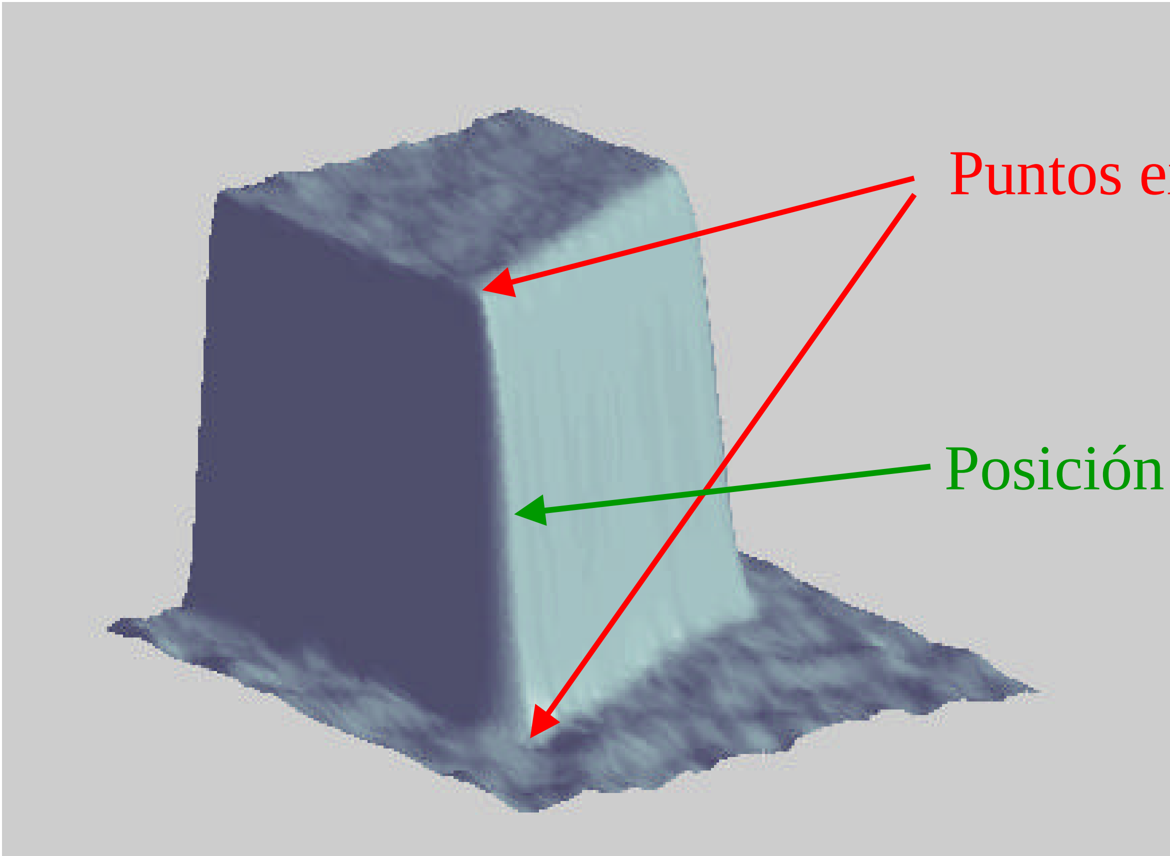
Métodos basados en la curvatura

Beaudet (1978)

- Propone un operador (invariante ante rotación) denominado $DET = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$
- La detección de esquinas se realiza por umbralización de los valores extremos de éste operador
- Se corresponde con el determinante de la matriz Hessiana
- Está relacionado con la *Curvatura Gaussiana*

$$K = k_{\max} k_{\min} = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^2}$$

Métodos basados en la curvatura



VISIÓN POR COMPUTADOR

Métodos basados en la curvatura

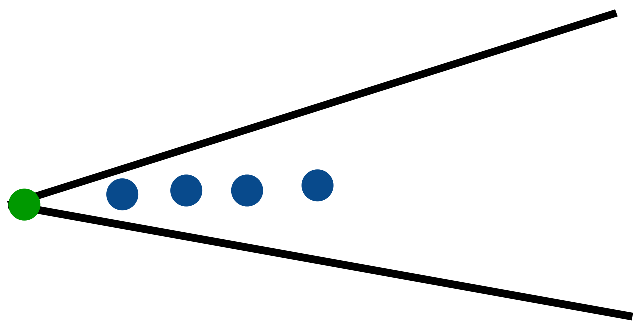
$$K = k_{\max} k_{\min} = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^{2}}{\left(1 + f_{x}^{2} + f_{y}^{2}\right)^{2}}$$

Dreschler y Nagel (1982)

- Calcula la Curvatura Gaussiana
- Selecciona los extremos de la Curvatura
- Corresponde puntos Elíptico e Hiperbólico cercanos. Las direcciones deben de ser de distinto signo y deben de estar alineadas
- Selecciona el punto intermedio que posee curvatura nula

Métodos basados en la curvatura

- ***Dreschler y Nagel (1982).***
  - Inconvenientes:
    - La distribución de los puntos elíptico, hiperbólico y parabólico depende del ángulo de la esquina y del difuminado
      - Al menos está en la bisectriz del ángulo



VISIÓN POR COMPUTADOR

Métodos basados en la curvatura

- ***Dreschler y Nagel (1982).***
  - Inconvenientes:
    - La distribución de los puntos elíptico, hiperbólico y parabólico depende del ángulo de la esquina y del difuminado
      - Al menos está en la bisectriz del ángulo
    - Ángulo de la esquina
      - Depende de la realidad y del punto de vista
    - Difuminado
      - Depende del enfoque, del PSF, del tratamiento
    - Las segundas derivadas son muy sensibles al ruido. Su filtrado difumina la imagen

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

Métodos basados en el gradiente

Kitchen y Rosenfeld (1982).

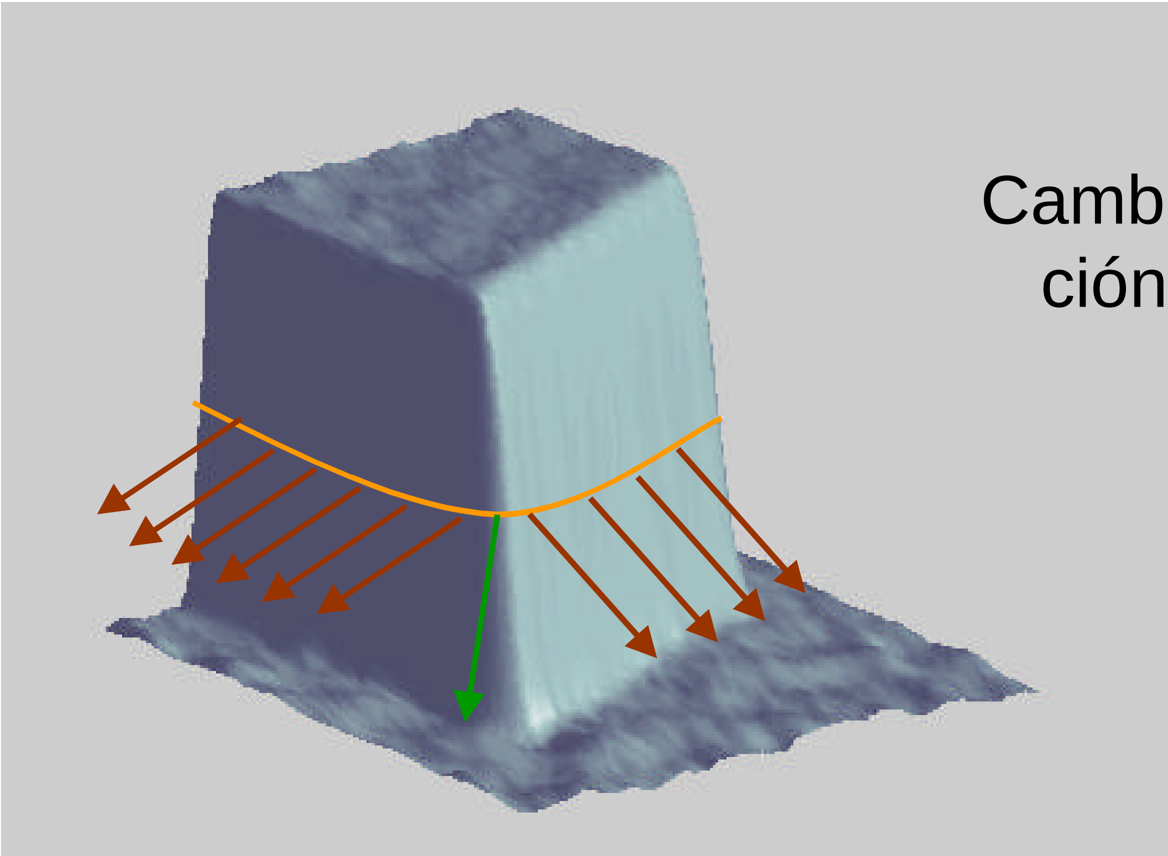
- Cambio de la dirección del gradiente a lo largo del borde, multiplicado por la magnitud del gradiente

$$K = \frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_x^2 + f_y^2}$$

- Para los puntos que son máximos en la dirección del gradiente, determina los máximos locales de la anterior expresión.
- Segunda derivada en la dirección perpendicular al gradiente

$$D_{g_\perp}^2 f = \overline{g_\perp}^T \cdot H_f \cdot \overline{g_\perp} = f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2$$

Métodos basados en el gradiente



Cambios en la dirección del gradiente

Métodos basados en el gradiente

- ***Kitchen y Rosenfeld (1982). Inconvenientes***
  - La dirección del gradiente en la cercanía de la esquina presenta una discontinuidad, por lo que pueda estar mal definida.
  - Los ceros de la segunda derivada en la dirección del gradiente no localizan exactamente al borde
  - Las segundas derivadas son muy sensibles al ruido. Su filtrado difumina la imagen

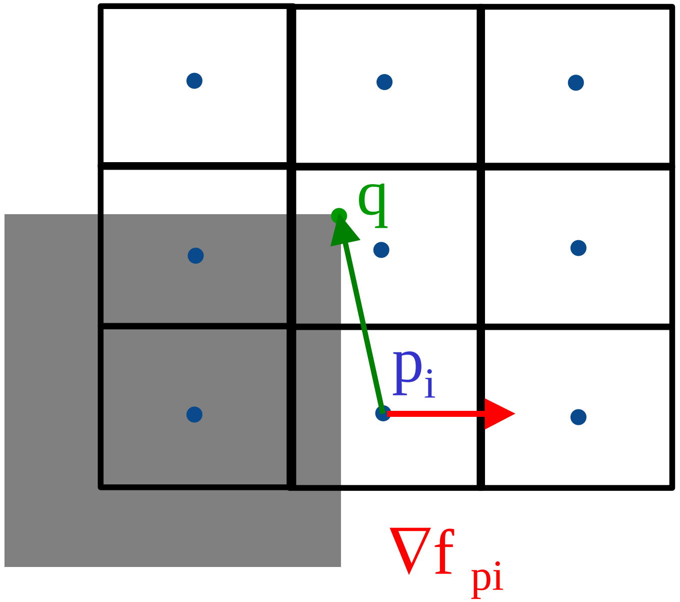
Métodos basados en el gradiente

Intel. Precisión Subpixel

Se pretende minimizar

$$e_i = \nabla f_{p_i}{}^T (q - p_i)$$

extendido a todo el dominio de vecindad



$$\left(\sum_i \nabla f_{p_i} \nabla f_{p_i}{}^T \right) q - \left(\sum_i \nabla f_{p_i} \nabla f_{p_i}{}^T p_i \right) = 0$$

$$q = A^{-1} b$$

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

Métodos basados en "puntos de interés"

- ***Punto de interés: Punto con una variación de intensidad en cualquier dirección***
  - Las esquinas son los máximos locales del mínimo cambio de intensidad
- ***Harris y Stephens (1988). Matriz de autocorrelación estimada por la derivadas de primer orden***

$$A = \begin{bmatrix} \sum f_x^{\,2} & \sum f_x f_y \\ \sum f_x f_y & \sum f_y^{\,2} \end{bmatrix}$$

Métodos basados en “puntos de interés”

- *Matriz de autocorrelación estimada por la derivadas de primer orden*

$$A=\begin{bmatrix} \sum f_x^{\,2} & \sum f_x f_y \\ \sum f_x f_y & \sum f_y^{\,2} \end{bmatrix}$$

- *Los vectores propios de la matriz A son las direcciones de máximo y mínimo cambio*
- *Posibilidades según los valores propios*
  - Ambos pequeños: Punto uniforme
  - Uno grande y otro pequeño: Punto borde
  - Ambos grandes: Punto esquina

VISIÓN POR COMPUTADOR

Métodos basados en "puntos de interés"

$$A = \begin{bmatrix} \sum f_x^{\ 2} & \sum f_x f_y \\ \sum f_x f_y & \sum f_y^{\ 2} \end{bmatrix}$$

- ***Förstner (1986).***
  - Máximo local del *Det(A)/Traza(A)*

- ***Harris (1988)***
  - Máximo local de: $Det(A) - 0.04[Traza(A)]^2$

Métodos basados en “puntos de interés”

Con Matriz de Autocorrelación

- ***Ventajas:***
  - Muy robusto ante el ruido
- ***Inconvenientes***
  - No localiza exactamente la esquina
  - Relativamente lento

Métodos basados en “puntos de interés”

- ***SUSAN, Smith y Brady (1994)***
  - Determina para cada punto un circulo (“nucleus”)
  - Determina para cada punto la región con intensidad similar dentro del “nucleus” (USAN-“Univalue Segment Assimilating Nucleus”)
  - Determina la existencia de una esquina en función del área y del centro de gravedad del USAN
- ***Ventajas: Preciso y rápido***
- ***Inconvenientes: Poco robusto***

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

Métodos con modelo predefinido

- ***Zuñiga y Haralick (1983).***
  - Modela la imagen de gris con una superficie bicúbica

$$f(x,y) = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 x^2 + k_5 xy + k_6 y^2 + \\ + k_7 x^3 + k_8 x^2 y + k_9 xy^2 + k_{10} y^3$$

  - La existencia de la esquina se detecta mediante

$$k = -2 \frac{\left(k_2^{\,2} k_6 - k_2 k_3 k_5 + k_3^{\,2} k_4\right)}{\left(k_2^{\,2} + k_3^{\,2}\right)^{3/2}}$$

  - Un umbral determina la existencia de la esquina

Métodos con modelo predefinido

- ***Deriche y Giraudon (1993).***
- ***Blaszka y Deriche (1994).***
  - Las esquinas se modelan como productos de escalones convolucionados con filtros Gaussianos
  - Permite modelar esquinas y vértices
  - Se minimiza mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- Conclusiones

Métodos basados en el "Scale-Space"

- ***Espacio de escala***

Dada una imagen $f(x, y)$

Y una función $g(x, y, \sigma)$

Se denomina Imagen Escalada

$$F(x, y, \sigma) = f(x, y) * g(x, y, \sigma)$$

- ***Función Monótona Decreciente H***

$$H\lfloor F(x, y, \sigma_1)\rfloor \leq H\lfloor F(x, y, \sigma_2)\rfloor \quad \text{para todo } \sigma_1 > \sigma_2 > 0$$

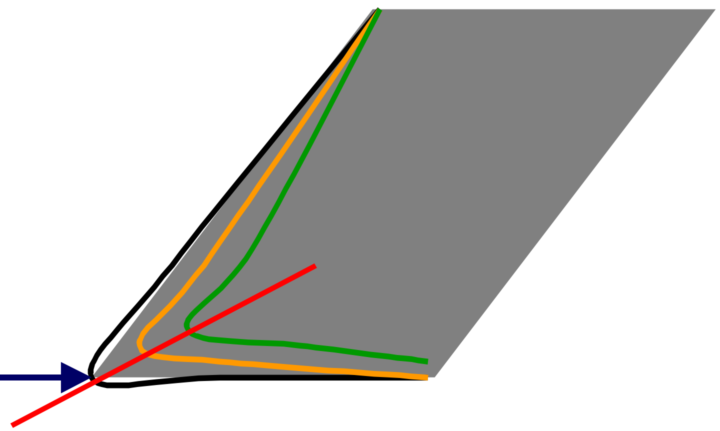
- ***Si g(.) es una distribución Gaussiana, los pasos por cero de la Laplaciana es una Función Monótona Decreciente***

VISIÓN POR COMPUTADOR

Métodos basados en el “Scale-Space”

Deriche y Giraudon (1993)

- Se calcula la Laplaciana de la imagen
- Calcula por el criterio de Beaudet la posición para dos escalas s_1 y s_2
- Con s_1 *y* s_2 se define una ***dirección***
- La posición de la esquina se determina en el corte de la dirección y la Laplaciana



Métodos basados en el "Scale-Space"

- ***Deriche y Giraudon (1993)***
  - Ventajas
    - Buen compromiso entre precisión, rapidez y robustez.
  - Inconvenientes
    - Los valores de s_1 *y* s_2 dependen en exceso de las imágenes: ángulo y difuminado

Métodos que utilizan imágenes binarias

- *Determinan los puntos que pertenecen al borde*
  - Adelgazando o con SNM
  - Mejor basados en la Laplacian que en la segunda derivada en la dirección del gradiente
- *Determina la curvatura de los puntos etiquetados*
- *Las esquinas serán los puntos con máxima curvatura*

$$k = -\frac{t^T H\, t}{g^T g} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} g = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}^T \\ t = \begin{bmatrix} -f_y & f_x \end{bmatrix}^T \end{array}$$

VISIÓN POR COMPUTADOR

- Introducción
- Definiciones
- Curvatura de una superficie
- Laplaciana y segunda derivada en la dirección del gradiente
- Métodos basados en la curvatura
- Métodos basados en el gradiente
- Métodos basados en los “puntos de interés”
- Métodos con modelo predefinido
- Métodos basados en el “Scale-Space”
- Métodos que emplean imágenes binarias
- **Conclusiones**

VISIÓN POR COMPUTADOR

Conclusiones

- ***No existe un método perfecto***
- ***Existe demasiada dependencia de las imágenes: modelo, ángulo, difuminado***
- ***Es conveniente distinguir dos problemas***
  - Detectar la existencia de borde
  - Localizar con precisión el borde
- ***Se recomienda fusionar métodos***
- ***Se recomienda utilizar distintas escalas***
  - Varias s
  - Varios dominios de vecindad